Sol D3.
Espaces vectoriels

Solution D3.1

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sev d'un ev de référence. Le cas échéant et si cela est possible, en donner une famille génératrice.

4. Des matrices.
   (a) $F_{10} = \text{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32})$.
   (b) La matrice nulle n'est pas dans F_{11}.
   (c) F_{12} est le noyau de l'application trace sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ qui est une application linéaire.
   Et $F_{12} = \text{Vect}\,(E_{12}, E_{13}, E_{23}, E_{21}, E_{31}, E_{32}, E_{11} - E_{22}, E_{11} - E_{33})$ par exemple.

Solution D3.3

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sev d'un ev de référence. Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

4. $F_4 = \{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
5. F_5 n'est pas un sev : $(1, 0, 0) \in F_5$ mais $-(1, 0, 0) \notin F_5$.
6. $F_6 = \{(x, y, z, 2x - y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}((1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1))$.

Solution D3.8

1. Faux ou faux ? Justifier. Soit E un espace vectoriel et X et Y deux parties de E.
   (b) Soit $u \in E$ un vecteur non nul et posons $X = \{u\}$ et $Y = \{-u\}$. Alors $\text{Vect}(X) = \text{Vect}(Y) = \text{Vect}(u)$ mais $X \cap Y = \emptyset$ et $\text{Vect}(X \cap Y) = \{0_E\}$.
   (c) Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $\text{Vect}(u, v) = \mathbb{R}^2$. Posons $X = \{u\}$ et $Y = \{-u\}$.
   Alors $\text{Vect}(X \cup Y) = \mathbb{R}^2$ mais $\text{Vect}\,X \cup \text{Vect}\,Y$ est simplement la réunion de deux droites (qui n'est même pas un sev de $\mathbb{R}^2$. Par exemple $u + v \notin \text{Vect}\,X \cup \text{Vect}\,Y$.
   (d) Dès que X est un sev de E, on a $\text{Vect}\,X = X$. Pour un contre-exemple, choisir n'importe quel sev strict de E (possible sauf si $E = \{0_E\}$).

Solution D3.11

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $F \cup G = F + G$.
Par l'absurde : supposons $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
Alors on dispose de $x_1 \in F \setminus G$ et $x_2 \in G \setminus F$.
$x_1 + x_2 \in F + G$ par définition, et donc $x_1 + x_2 \in F \cup G$ d'après l'hypothèse.

- si $x_1 + x_2 \in F$, alors $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 \in F$ par stabilité, ce qui est faux.
- si $x_1 + x_2 \in G$, alors $x_1 = (x_1 + x_2) - x_2 \in G$ par stabilité, ce qui est faux.

D'où la contradiction.

$\boxed{\Leftarrow}$ **1^er^ cas :** $F \subset G$. Dans ce cas $F \cup G = G$ et $F + G = G$, d'où l'égalité.
2^e^ cas : $G \subset F$. Dans ce cas $F \cup G = F$ et $F + G = F$, d'où l'égalité.

Solution D3.18

Les applications suivantes sont-elles des morphismes d'espaces vectoriels ? Le cas échéant, déterminer leur noyau et leur image.

5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$.

   $\operatorname{Im} f_5 = \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Ker} f_5 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = 0\}$.

6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (X^2+1)P \end{array}$.

   $\operatorname{Im} f_6 = \{(X^2+1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$ et $\operatorname{Ker} f_6 = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

7. $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$.

   Linéarité Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{array}{rcl} f_7(P+Q) & = & (P+Q)(0) \\ & = & P(0)+Q(0) \\ & = & f_7(P)+f_7(Q). \end{array}$$
   $$\begin{array}{rcl} f_7(\lambda \cdot P) & = & (\lambda \cdot P)(0) \\ & = & \lambda \cdot P(0) \\ & = & \lambda \cdot f_7(P). \end{array}$$

   Noyau Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\begin{array}{rcl} P \in \operatorname{Ker} f_7 & \Leftrightarrow & f_7(P) = 0_{\mathbb{R}} \\ & \Leftrightarrow & P(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (X-1) \div P \\ & \Leftrightarrow & P \in \{(X-1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}. \end{array}$

   Donc $\operatorname{Ker} f_7 = \{(X-1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

   Image Montrons que $\operatorname{Im} f_7 = \mathbb{R}$.
   Soit $a \in \mathbb{R}$ et P le polynôme constant égal à a.
   $P \in \mathbb{R}[X]$ et $f_7(P) = a$. Donc $a \in \operatorname{Im} f_7$.
   Réciproquement, on a bien $\operatorname{Im} f_7 \subset \mathbb{R}$.
   Donc $\operatorname{Im} f_7 = \mathbb{R}$.

8. $f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$.

   Linéarité Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{array}{rcl} f_8(P+Q) & = & ((P+Q)(0), (P+Q)(1), (P+Q)(2)) \\ & = & (P(0)+Q(0), P(1)+Q(1), P(2)+Q(2)) \\ & = & (P(0), P(1), P(2)) + (Q(0), Q(1), Q(2)) \\ & = & f_8(P)+f_8(Q). \end{array}$$
   $$\begin{array}{rcl} f_8(\lambda \cdot P) & = & ((\lambda \cdot P)(0), (\lambda \cdot P)(1), (\lambda \cdot P)(2)) \\ & = & (\lambda P(0), \lambda P(1), \lambda P(2)) \\ & = & \lambda \cdot (P(0), P(1), P(2)) \\ & = & \lambda \cdot f_8(P). \end{array}$$

Noyau Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f_8 &\Leftrightarrow f_8(P) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow (P(0), P(1), P(2)) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f_8 = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.

Image Montrons que $\operatorname{Im} f_8 = \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{M1}}$ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Im} f_8 &\Leftrightarrow \exists P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X],\ f_8(P) = (x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_2[X],\ (P(0), P(1), P(2)) = (x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_2[X],\ \begin{cases} c = x \\ a + b + c = y \\ 4a + 2b + c = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_2[X],\ \begin{cases} a + b + c = y \\ -2b - 3c = z - 4y \\ c = x \end{cases}. \end{aligned}$$

Ce système est compatible pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{Im} f_8 = \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{M2}}$ (voir après le chapitre sur la dimension) $\dim(\operatorname{Ker} f_8) = 0$. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(f_8) = 3$. Donc $\operatorname{Im}(f_8)$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, donc $\operatorname{Im}(f_8) = \mathbb{R}^3$

Solution D3.21

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $u^2 = u \circ u$

1. Soit $x \in E$. $x \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow u(x) = 0_E \Rightarrow u(u(x)) = 0_E \Rightarrow u^2(x) = 0_E \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u^2$.
2. Soit $y \in E$. $y \in \operatorname{Im} u^2 \Rightarrow \exists x \in E,\ y = u^2(x)$. Posons $a = u(x)$. Alors $y = u(a)$. Donc $y \in \operatorname{Im} u$.
3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

   $\boxed{\supset}$ $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$ car $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$ est un sev de E.

   $\boxed{\subset}$ Soit $y \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$.
   $y \in \operatorname{Im} u$ donc $\exists x \in E,\ y = u(x)$.
   $y \in \operatorname{Ker} u$ donc $u(y) = 0_E$, donc $u(u(x)) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker} u^2$.
   D'après l'hypothèse $x \in \operatorname{Ker} u$, donc $u(x) = 0_E$, donc $y = 0_E$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$.

   $\boxed{\subset}$ $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ est toujours vrai (question 1).

   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$.
   Alors $u(u(x)) = 0_E$. Donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u$ mais aussi $u(x) \in \operatorname{Im} u$.
   D'après l'hypothèse, $u(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker} u$.
4. $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u$. Montrons que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.

   $\boxed{\supset}$ $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$ est toujours vrai (question 2).

   $\boxed{\subset}$ Soit $y \in \operatorname{Im} u$. $\exists x \in E,\ y = u(x)$
   Hypothèse : $\exists (x_1, x_2) \in \operatorname{Im} u \times \operatorname{Ker} u,\ x = x_1 + x_2$.
   Comme $x_1 \in \operatorname{Im} u$, $\exists a \in E,\ x_1 = u(a)$.
   Alors $y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(u(a)) + 0_E = u^2(a) \in \operatorname{Im} u^2$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.

$\boxed{\supset}$ $\operatorname{Im} + \operatorname{Ker} u \subset E$ car c'est un sev de E.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in E$. Alors $u(x) \in \operatorname{Im} u$.
Comme $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$, $u(x) \in \operatorname{Im} u^2$, donc $\exists a \in E$, $u(x) = u^2(a)$.
$u(x) = u(u(a))$ donc $u(x - u(a)) = 0_E$ par linéarité. D'où $x - u(a) \in \operatorname{Ker} u$.
Finalement $x = u(a) + x - u(a) \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u$.