TD E2. Probabilités sur un univers fini

Exercice E2.1 Dans un espace probabilisé, soit deux événements A et B tels que $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(B) = \dfrac{1}{4}$.

1. Donner un encadrement de $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Calculer $P(A \cup B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$. Même question si $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.

Exercice E2.2 ✵

Je permute aléatoirement les lettres du mot ANANAS. Quelle est la probabilité que j'obtienne encore le mot ANANAS ?

Exercice E2.3

On lance trois fois de suite un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir des résultats classés

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant (au sens large) ?

Exercice E2.4 ✵

Un dé pipé est tel que chaque résultat i a une fréquence d'apparition proportionnelle à i^2. On lance une fois ce dé et on observe le résultat. Décrire l'univers et déterminer la loi de probabilités associés à cette expérience.

Exercice E2.5 ✵✵

Une loterie, organisée chaque semaine, vend 100 billets à 1 euro chacun, dont 3 sont gagnants. Je souhaite investir 5 euros pour obtenir au moins un billet gagnant. Ai-je intérêt à acheter 5 billets la même semaine ou un billet par semaine pendant 5 semaines ?

Exercice E2.6 ✵ *(un problème du Chevalier de Méré)*

1. On lance un dé (classique) 4 fois de suite. Montrer qu'il est avantageux de parier sur l'obtention d'au moins un six.
2. Que dire de l'obtention d'un double-six en lançant 24 fois de suite deux dés classiques ? *(calculatrices autorisées)*

Exercice E2.7 ✵

Soit $\Omega = [\![0, n]\!]$. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que P soit une probabilité sur Ω si on pose

$$\forall k \in \Omega,\ P(\{k\}) = \frac{\lambda}{3^k}\binom{n}{k}.$$

Exercice E2.8 ✵

Dans une usine, deux machines A et B produisent des pièces. On constate que A assure 60% de la production de l'usine. Cependant 5% des pièces qu'elle produit sont défectueuses alors que c'est le cas pour seulement 3% des pièces produites par la machine B.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce sortant de l'usine soit défectueuse.
2. On examine une pièce à la sortie de l'usine et on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine A ?
3. Même question avec une pièce de bonne qualité.

Exercice E2.9 ✿

On a 4 boîtes B_1, B_2, B_3 et B_4. Dans la boîte B_i, on a i boules noires et $(4-i)$ boules blanches. On choisit aléatoirement une boîte, la boîte B_i ayant pour probabilité d'être choisie $\dfrac{i}{10}$ puis on tire une boule de cette boîte.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?
2. Si la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle vienne de la boîte n° 3 ?

Exercice E2.10 ✿ *(plus d'information = moins de certitudes)*

1. Une dame vous raconte sa vie : « Vous savez, j'ai deux enfants, dont une fille... ». Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
2. et elle poursuit : « ...une fille qui est mon aînée et... ». Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice E2.11 ✿✿

Dans une population donnée, un individu sur 8 est blond. Par ailleurs, deux blonds sur 3 ont les yuenx bleus et 80% des individus aux yeux bleus sont blonds ? Quelle est la proportion des individus de cette population qui possèdent les yeux bleus sans être blonds ?

Exercice E2.12 ✿✿

Une urne contient trois boules jaunes et une boule bleue. On effectue des tirages successifs et avec remise d'une boule de cette urne, et ce jusqu'à obtenir la boule bleue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :
J_n : j'ai obtenu une balle jaune au n-ième tirage,
B_n : j'obtiens la balle bleue au n-ième tirage,
A : l'expérience a une fin.

1. Montrer que les événements B_n sont deux à deux incompatibles.
2. Exprimer l'événement B_n à l'aide des J_i.
3. Déterminer $P(F)$.

Exercice E2.13 ✿✿

On lance 100 fois de suite un dé équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois un résultat pair ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement $2k$ fois un résultat pair ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de fois un résultat pair ?

Exercice E2.14

Étant donné $N \geqslant 2$, Indiana Jones tente de franchir N obstacles successifs, tous du même type : pour tout $i \geqslant 1$, à la i^{e} étape, il a le choix entre i portes (sans aucun indice) dont une seulement lui permet de poursuivre et les autres débouchent sur un piège mortel. Pour tout i, on définit les événements A_i : « Indiana a franchi la i^{e} étape » et B_i : « Le dernier obstacle franchi est le i^{e}. ». Évidemment, si Indiana ne franchit pas un obstacle, il ne franchit alors pas les suivants puisqu'il est mort.

1. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, calculer $P(A_i)$.
2. Montrer que $\forall 1 \leqslant i \leqslant N-1$, $P(B_i) = \dfrac{1}{i!} - \dfrac{1}{(i+1)!}$.
3. Que vaut $P(B_N)$?

Exercice E2.15 ✲✲

Donner un exemple d'expérience aléatoire menant à un univers fini et de trois événements tels qu'ils soient deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice E2.16 ✲✲ *(Indicatrice d'Euler)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers (avec les p_i tous distincts et les α_i non nuls). On appelle indicatrice d'Euler de n le nombre $\phi(n)$ d'entiers de $[\![1, n-1]\!]$ qui sont premiers avec n. On considère l'univers $\Omega = ([\![1, n]\!])$ muni de la probabilité uniforme P.

1. Si d est un diviseur de n, on note M_d l'ensemble des multiples de d dans Ω. Calculer $P(M_d)$.
2. Montrer que les M_{p_i} sont mutuellement indépendants ($1 \leqslant i \leqslant r$).
3. En déduire que
$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_i}).$$

Exercice E2.17 ✲✲

Lors d'une pause bien méritée au cours de la conception de cette feuille de TD, j'observe une mouche qui vole de sommet en sommet sur l'abat-jour triangulaire de ma chambre. À l'instant 0, elle se trouve sur le sommet A et je remarque que

- si elle est sur le sommet A à un instant donné, elle vole vers le B ou le C de manière équiprobable à l'instant suivant,
- si elle est sur le sommet B à un instant donné, elle vole vers le A ou le C de manière équiprobable à l'instant suivant,
- si elle est sur le sommet C à un instant donné, elle y reste enfin définitivement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (resp. B_n et C_n) l'événement : « la mouche est sur le sommet A (resp. B et C) à l'instant n. » et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Déterminer une relation vérifiée par les termes de la suite (c_n).
3. En déduire l'expression de c_n en fonction de n. Interpréter.