Chapitre E2

Probabilités sur un univers fini

Objectifs

- Appréhender le formalisme des espaces probabilisés.
- Lire un arbre de probabilités conditionnelles dans tous les sens.
- Notion d'indépendance.

1 Expérience aléatoire

Définition E2.1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude. Les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés **issues** et leur ensemble est l'**univers** des possibles, souvent noté Ω.
Un **événement** est un sous-ensemble de Ω dont on dit qu'il se produit ou non suivant l'issue de l'expérience.

Notation. Soit $A \subset \Omega$ un événement aléatoire. On dit que cet événement est réalisé lorsque l'issue ω de notre expérience est un élément de A.

On a alors la correspondance suivante entre le vocabulaire des événements et celui des parties de Ω.

événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement élémentaire	singleton $\{\omega\}$
disjonction (A ou B)	$A \cup B$
conjonction (A et B)	$A \cap B$
événement contraire de A	$\overline{A}$
événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
système complet d'événements	partition

Remarque. Un système complet d'événements (s.c.e.) permet de décomposer un événement en plusieurs sous-événements : soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un s.c.e. et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $B = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$.

2 Loi de probabilité

Définition E2.2

Soit Ω un univers fini. $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ est une **loi de probabilité** lorsque

- $P(\Omega) = 1$,
- $\forall A, B$ incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans ce cas, on dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un **espace probabilisé fini**.

Définition E2.3

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Un événement A est dit **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$ et **négligeable** ou **presque impossible** lorsque $P(A) = 0$.

Proposition E2.4

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et A, B des événements. Alors

(i) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

(ii) (inégalité de Boole) $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$,

(iii) (formule du crible) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

(iv) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$,

(v) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

Remarques.

- Avec Ω fini, donner $P(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$ suffit à définir la loi de probabilités P.
- L'inégalité de Boole se généralise à un nombre n quelconque d'événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- La formule du crible se généralise également. On l'énonce ici pour trois événements A, B et C.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Théorème E2.5

Avec les mêmes notations et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3 Probabilités conditionnelles

Théorème et définition E2.6

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et A, B des événements. Si $P(B) \neq 0$, on définit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Alors P_B est une loi de probabilité et $P_B(A)$, aussi notée $P(A|B)$, s'appelle la **probabilité conditionnelle de A sachant B.**

Remarque. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des événements incompatibles. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} P_B(A_i) = P_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

En particulier, $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$.

Théorème E2.7 (Formule des probabilités composées)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des événements (avec $n \geqslant 2$) tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque. En particulier, $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$, ce qui n'est pas une grosse surprise au vu de la définition.

Dém. E2.7

Par récurrence, l'hérédité étant assurée par $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$ appliquée avec $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et $B = A_{n+1}$.

Théorème E2.8 (Formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements (non négligeables). Alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B).$$

Dém. E2.8

Les $B \cap A_i$ forment une partition de B, comme on l'a souligné en début de chapitre.
Donc $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)$ par définition de P_{A_i}.

Corollaire E2.9

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $P(A) > 0$. Alors

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Théorème E2.10 (Formule de Bayes)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $P(A)$ et $P(B)$ non nuls. Alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

Remarque. On trouve une version générale de cette formule pour laquelle il suffit d'exprimer $P(B)$ à l'aide de la formule des probabilités totales avec $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements : pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(A|B) = \frac{P_A(B)P(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

4 Indépendance

Définition E2.11

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Proposition E2.12

Avec les notations ci-dessus, si A et B sont indépendants, alors

- A et $\overline{B}$ sont indépendants,
- $\overline{A}$ et B sont indépendants,
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants,
- $P_B(A) = P(A)$.

Définition E2.13

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. On dit que des événements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont

(i) **indépendants deux à deux** lorsque

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

(ii) **mutuellement indépendants** lorsque

$$\forall J \subset [\![1, n]\!],\ P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

Proposition E2.14

Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse.

Méthodes

- Calculer des probabilités
  - ➢ par dénombrement direct d'issues équiprobables,
  - ➢ en parcourant un arbre par probabilités composées,
  - ➢ en décomposant à l'aide des probabilités totales,
  - ➢ par la formule de Bayes.