DEVOIR MAISON n° 16

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

A Partie A

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E = 0.$$

On note $g = f - 3\,\mathrm{id}_E$, $h = f + \mathrm{id}_E$, $G = \operatorname{Ker} g$ et $H = \operatorname{Ker} h$.

1. Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} h \subset G$ et $\operatorname{Im} g \subset H$.
3. Montrer que $G \oplus H = E$.

Soit p la projection vectorielle sur G parallèlement à H et q la projection vectorielle sur H parallèlement à G.

4. (a) Montrer que $f = 3p - q$. *Indication : commencez par décomposer un vecteur x en $x_G + x_H$, avec $x_G \in G$ et $x_H \in H$, puis exprimez $f(x)$ et $(3p - q)(x)$ à l'aide de x_G et x_H.*
   (b) En déduire une expression de f^n en fonction de p et q, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Simplifiez le plus possible l'expression trouvée !
5. (a) Exprimer p et q en fonction de f et id_E.
   (b) En déduire une expression de f^n en fonction de n, f et id_E.

B Partie B

On pose dans cette partie $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (5x - 4y, 3x - 3y)\ .$$

6. (a) Montrer que $f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E = 0$.
   (b) Exprimer $f^n(x, y)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 3v_n \end{cases}.$$

   Exprimer u_n et v_n uniquement en fonction de n.

Problème 2

Une urne contient des boules indiscernables au toucher, à savoir r boules rouges et b boules blanches avec r et b non nuls. On effectue des tirages successifs d'une boule. Après chaque tirage, on remet dans l'urne la boule tirée avec, en plus, c boules de la même couleur qu'elle (avec $c \in \mathbb{N}^*$ fixé au départ).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle B_n l'événement « la n-ième boule tirée est blanche » et R_n l'événement « la n-ième boule tirée est rouge ».

On s'intéresse aussi à l'évolution du nombre de boules dans l'urne. Pour cela, étant donnés $n, k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement X_n^k : « il y a exactement k boules rouges dans l'urne à la fin du tirage n (sous-entendu après la remise des boules, juste avant le tirage $n+1$) ».

1. Dans cette question (et seulement dans celle-ci), on s'intéresse au cas particulier $r = b = c = 1$.
   (a) Montrer que $P(X_1^1) = P(X_1^2)$.
   (b) À l'aide d'un arbre, déterminer $P(X_2^1)$, $P(X_2^2)$, $P(X_2^3)$, $P(X_3^1)$, $P(X_3^2)$, $P(X_3^3)$ et $P(X_3^4)$.
   (c) Le but de cette question est de démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition
   $$\mathcal{H}_n \,:\, \forall k \in [\![1, n+1]\!],\, P(X_n^k) = \frac{1}{n+1}.$$
      i. Définir un système complet d'événements. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X_n^k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ est un système complet d'événements.
      ii. Pour $k \in [\![1, n+2]\!]$, exprimer $P(X_{n+1}^k)$ en fonction des $P(X_n^k)$ et de certaines probabilités conditionnelles.
      iii. En supposant que $\mathcal{H}_n$ est vraie, simplifier l'expression de $P(X_{n+1}^k)$ obtenue à la question précédente. Conclure.
   (d) Toujours à l'aide du même système complet d'événements, montrer que $P(R_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.
2. Désormais pour tout le reste du problème, on revient au cas général $r, b, c \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la deuxième boule tirée est rouge ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $p_n(r, b)$ la probabilité d'obtenir une boule rouge au n-ième tirage (r et b représentent toujours les nombres de boules rouges et blanches au début de l'expérience).
   (a) Montrer que
   $$\forall n \geqslant 2,\, p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c).$$
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(R_n) = \dfrac{r}{r+b}$.
   (c) On appelle $p_{m,n}(r, b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m-ième et n-ième tirages (toujours lorsque l'urne contient b boules blanches et r boules rouges au départ). En utilisant une méthode analogue à celle développée précédemment, démontrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $m \in [\![1, n-1]\!]$, on a
   $$p_{m,n}(r, b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.$$
   (d) Pour $n \geqslant 2$ et $m \in [\![1, n-1]\!]$, en déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.

Cette expérience porte le nom du mathématicien américain György Pólya (oui, il était d'origine hongroise). On lui doit de nombreux travaux sur les probabilités et la théorie des nombres tout au long du XX^e siècle, mais aussi des traités de didactique et de pédagogie. L'expérience de l'urne de Pólya permet de modéliser des comportements boursiers au cours desquels un acheteur qui achète une action provoque par la hausse de son cours un regain d'intérêt (modélisé par l'ajout des c boules identiques à celle tirée).