

# TD C5. Fractions rationnelles

## Exercice C5.1

1. Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ .

(a)  $\frac{1}{X^2 + 28}$ ,

(b)  $\frac{X^2 + 14}{X^2 + 42}$ ,

(c)  $\frac{X^4 + 1}{(X^2 + 1)(X + 1)^2 S}$ ,

(d)  $\frac{X^2 + 3X + 1}{(X - 2)(X - 1)^2}$ ,

(e)  $\frac{3}{X^3 + 1}$ ,

(f)  $\frac{1}{(X^2 - 1)(X^2 + 4)}$ .

2. Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ .

(a)  $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$ ,

(b)  $\frac{X^2}{(X^2 + X + 1)^2}$ ,

(c)  $\frac{X}{(X^2 + 1)(X^2 - j^2)^2}$ .

## Exercice C5.2

Simplifier  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$  et calculer sa limite quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## Exercice C5.3

Calculer les limites et intégrales suivantes.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t dt}{t^4 + 1}$ ,

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t dt}{(t+1)^2(2t+1)}$ ,

3.  $\int_{-1}^1 \frac{t^2 dt}{t^2 + 2t + 5}$ ,

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2(t^2 - 2t + 2)}$ .

## Exercice C5.4

Calculer les dérivées successives de

1.  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ ,

2.  $x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ .

## Exercice C5.5

1. Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction  $F(X) = \frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$ .

2. En déduire  $U, V \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $(X+1)^3 U(X) + (X-1)^3 V(X) = 1$ .

## Exercice C5.6

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction  $\frac{X^{11}}{(X^2 + X + 1)^4}$ .

## Exercice C5.7

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner la décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$  puis dans  $\mathbb{R}(X)$  de  $\frac{1}{X^{2n} - 1}$ .

**Exercice C5.8** ⚙️Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction rationnelle  $\frac{n!}{\prod_{k=0}^n (X - k)}$ .
- En déduire que  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$ .
- Comment peut-on obtenir ce résultat d'une autre manière ?

**Exercice C5.9** ⚙️⚙️

Soit  $a, b, c \in \mathbb{C}^3$  et  $F = \frac{aX^2 + bX + c}{(X-1)^2(X-2)^2}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b$  et  $c$  pour que  $F$  admette une primitive rationnelle.

**Exercice C5.10** ⚙️⚙️

Soit  $m, n \in \mathbb{N}$ . Donner la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  de  $\frac{X^m}{(X-1)^n}$ .

**Exercice C5.11** ⚙️⚙️⚙️ (théorème de Gauß-Lucas)

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\sum_{\omega \in U_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}$ .
- Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant et  $z_1, \dots, z_r$  ses racines distinctes. Montrer que pour toute racine  $z$  de  $P'$ , il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_+$  tels que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$  et  $z = \sum_{i=1}^r \lambda_i z_i$ .