Chapitre D5

Fractions rationnelles

Objectifs

- Saisir la construction du corps des fractions rationnelles.
- Savoir calculer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque (en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Construction

Théorème et définition D5.1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{K}(X)$ et une application surjective $\varphi : \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{K}(X)$ telle que pour tous couples $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$,

$$\varphi(A, B) = \varphi(C, D) \Leftrightarrow AD = BC.$$

Un élément $F = \varphi(A, B) \in \mathbb{K}(X)$ est appelé **fraction rationnelle à coefficients dans** $\mathbb{K}$ et noté $\dfrac{A}{B}$.

Définition et proposition D5.2

Soit $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$. Les opérations

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

définissent deux lois de composition internes sur $\mathbb{K}(X)$ et font de $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ un corps, où $0_{\mathbb{K}(X)} = \dfrac{0}{1}$ et $1_{\mathbb{K}(X)} = \dfrac{1}{1}$.

Remarque. Il s'agit notamment de vérifier que ces définitions ne dépendent pas du représentant choisi : pour $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $F + G$ et $F \times G$ donnent le même résultat quels que soient les polynômes A, B, C, D

choisis pour représenter $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$.

Proposition D5.3

L'application $P \mapsto \dfrac{P}{1}$ est un morphisme injectif d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Remarque. Cela permet d'identifier tout polynôme P à la fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$, faisant de $\mathbb{K}[X]$ une partie, et même un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

Dans toute la suite, l'écriture $\dfrac{A}{B}$ sous-entend que $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.

Proposition D5.4

L'opération définit par $\lambda \cdot \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lambda A}{B}$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{K}(X)$ qui fait de $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Proposition et définition D5.5

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que $A \wedge B = 1$ et B soit unitaire. La fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$ est appelée **le représentant irréductible** (ou **la forme irréductible**) de F.

Remarque. On parle d'un représentant irréductible (ou de fraction irréductible) dès que $A \wedge B = 1$, mais seul le fait que B soit scindé garantit l'unicité et justifie l'emploi de l'article défini.

2 Outils

Proposition et définition D5.6

Pour tout $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, la fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$ ne dépend pas du choix de (A, B) et s'appelle **dérivée de** F, notée F'.

Proposition D5.7

Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

(i) $(F + G)' = F' + G'$,

(ii) $(\lambda \cdot F)' = \lambda \cdot F'$,

(iii) $(FG)' = F'G + FG'$,

(iv) si $G \neq 0_{\mathbb{K}(X)}$, alors $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{F'G - FG'}{G^2}$,

(v) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P' = \left(\dfrac{P}{1}\right)'$.

Proposition et définition D5.8

Pour tout $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, la quantité $\deg A - \deg B$ ne dépend pas du choix de (A, B) et s'appelle **degré de** F, que l'on note $\deg F$.

Proposition D5.9

Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

(i) $\deg(F + G) \leqslant \max\{\deg F, \deg G\}$,

(ii) $\deg(\lambda \cdot F) = \begin{cases} \deg F \text{ si } \lambda \neq 0, \\ -\infty \text{ si } \lambda = 0, \end{cases}$

(iii) $\deg(FG) = \deg F + \deg G$,

(iv) si $G \neq 0$, alors $\deg\left(\dfrac{F}{G}\right) = \deg F - \deg G$.

Proposition et définition D5.10

Pour tout $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ irréductible, la fonction $x \mapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$, définie sur $\mathbb{K}$ privé des racines de B, ne dépend pas du choix de (A, B) et s'appelle **fonction rationnelle associée à** F, que l'on notera encore F.

Proposition et définition D5.11

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. La quantité $\nu_\alpha(F) = \nu_\alpha(A) - \nu_\alpha(B)$ ne dépend pas du choix de (A, B). On l'appelle **multiplicité de** α en tant que racine de F.

- Si $\nu_\alpha(F) > 0$, on dit que α est une **racine** de F.
- Si $\nu_\alpha(F) < 0$, on dit que α est un **pôle** de F.

Proposition D5.12

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ avec $A \wedge B = 1$.

- Les racines de F sont les racines de A (avec même multiplicité).
- Les pôles de F sont les racines de B (avec même multiplicité).

Proposition et définition D5.13

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que $F = E + G$ et $\deg G < 0$. Le polynôme E est le quotient de la division euclidienne de A par B est s'appelle **partie entière de** F.

3 Décomposition en éléments simples

Définition D5.14

On appelle **élément simple** de $\mathbb{K}(X)$ toute fraction rationnelle de la forme $\dfrac{A}{B^n}$ avec B polynôme irréductible unitaire, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg A < \deg B$.

Proposition D5.15

Soit $F = \dfrac{A}{B_1 B_2} \in \mathbb{K}(X)$ avec $\deg F < 0$ et $B_1 \wedge B_2 = 1$. Alors il existe $A_1, A_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $F = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$ et $\forall i \in \{1,2\}$, $\deg A_i < \deg B_i$.

Proposition D5.16

Soit $F = \dfrac{A}{B^n} \in \mathbb{K}(X)$ avec $\deg F < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{B^k}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\deg A_k < \deg B$.

Remarque. Après identification de sa partie entière, l'application de ces deux propriétés, avec la décomposition du polynôme B de $\mathbb{K}[X]$ en produit d'irréductibles, permet d'établir l'existence et l'unicité de la décomposition de toute fraction rationnelle en éléments simples.

Théorème D5.17 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$)

Soit $F \in \mathbb{C}[X]$ de partie entière E et de pôles distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, de multiplicités respectives $\nu_1, \ldots, \nu_r$. Alors il existe un unique famille $(\lambda_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant k \leqslant \nu_i}} \subset \mathbb{C}$ telle que

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu_i} \frac{\lambda_{ik}}{(X - \alpha_i)^k}$$

Théorème D5.18 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$)

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{R}[X]$ de partie entière E. On écrit la décomposition de B en produit d'irréductibles (avec les notations évidentes) :

$$B = \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{\nu_i} \prod_{j=1}^{r}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{\mu_j}.$$

Alors il existe des uniques familles $(a_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant k\leqslant \nu_i}} \subset \mathbb{C}$, $(b_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\1\leqslant k\leqslant \mu_j}} \subset \mathbb{C}$ et $(c_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\1\leqslant k\leqslant \mu_j}} \subset \mathbb{C}$ telles que

$$F = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_i}\frac{a_{ik}}{(X-\alpha_j)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{\mu_j}\frac{b_{jk}X+c_{jk}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^k}.$$

Remarque. Dans les deux cas, la partie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\nu_i}\frac{a_{ik}}{(X-\alpha_j)^k}$ s'appelle **partie polaire** de F associée au pôle α_i.

Théorème et définition D5.19 (Partie polaire associée à un pôle simple)

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F. Si on note $\frac{\lambda}{X-\alpha}$ la partie polaire de F associée à α, alors

(i) $\lambda = ((X-\alpha)F(X))\,|_{X=\alpha}$ (l'évaluation en α de $(X-\alpha)F(X)$).

(ii) $\lambda = \dfrac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$.

En particulier, $\lambda \in \mathbb{K}^{\times}$. On l'appelle **résidu** de F en α.

Théorème D5.20 (Décomposition en éléments simples de P'/P)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ ses racines et $(\nu_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ leurs multiplicités respectives. Alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, le résidu de $\dfrac{P'}{P}$ en α_i est ν_i. Autrement dit

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r}\frac{\nu_i}{X-\alpha_i}.$$

Méthodes

- Déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle.
- Déterminer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle
  - ➢ en calculant les résidus,
  - ➢ à l'aide d'évaluations,
  - ➢ par division euclidienne,
  - ➢ par un calcul de limites,
  - ➢ à l'aide de la parité,
  - ➢ à l'aide de la conjugaison complexe.