Sol C4.
Polynômes

Solution C4.1

1. Produit de Cauchy : $P = (1 + X + X^2 + \ldots + X^n)^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $c_k = \begin{cases} k \text{ si } k \leqslant n \\ n-k \text{ sinon} \end{cases}$.

2. $Q = (1 - X + X^2 + \ldots + (-1)^n X^n)^2 = P(-X) = \sum_{k=0}^{2n} d_k X^k$ avec $d_k = (-1)^k c_k$.

Exercice C4.3

1. Soit $(T_n)_n$ la suite de polynômes définie par $\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = 2X \\ \forall n \geqslant 2,\, T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \end{cases}$.
   On montre par récurrence (double) que $\deg(T_n) = n$ pour tout n.
2. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
   On écrit $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots$ avec $a_n \neq 0$ (*i.e.* P de degré n).
   Alors $P(X+1) = a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \ldots$.
   Puis avec le binôme de Newton : $P(X+1) = a_n(X^n + nX^{n-1} + \ldots) + a_{n-1}(X^{n-1} + \ldots) + \ldots$.
   Donc $P(X+1) - P(X) = na_nX^{n-1} + \ldots$.
   Le coefficient dominant est non nul si $n > 0$, donc $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ (si P n'est pas constant).
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit Q_n un polynôme non nul vérifiant $Q_n'' - 3XQ_n' + 3nQ_n = 0$. Si $\deg(Q_n) = d > 0$ et son coefficient dominant est a_d, alors on a : $Q_n = a_dX^d + \ldots$, $Q_n' = da_dX^{d-1} + \ldots$ et $\deg(Q_n'') < d$. Donc le coefficient dominant de $Q_n'' - 3XQ_n' + 3nQ_n$ est $3(n-d)a_d$, nul par hypothèse. Donc $\deg(Q_n) = n$. Le cas de Q_n constant est exclu car alors il serait nul, sauf si $n = 0$. Et dans ce cas, $\deg(Q_n) = n$ est bien vérifié également.

Solution C4.10

3. Il existe un couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$, *i.e.* $\deg R \leqslant 1$. Posons alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$.
   On a $A(X) = (X-2)^2Q(X) + aX + b$ et, en dérivant, $A'(X) = (X-2)\big((X-2)Q'(X) + 2Q(X)\big) + a$.
   Les évaluations en 2 de ces égalités donnent $A'(2) = a$, soit $a = 2n \times 2^{2n-1} + 2n \times 2^{n-1} = n(2^{2n} + 2^n)$; puis $A(2) = 2a + b$, soit $2^{2n} + 2^{n+1} - 2 = 2a + b$, *i.e.* $b = 2^{2n}(1-2n) + 2^{n+1}(1-n) - 2$.

Solution C4.13

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le PGCD de

1. Après algorithme d'Euclide : $X^4 - X^2 + 2X - 2 \wedge X^3 + X - 2 = X - 1$.
2. Après algorithme d'Euclide : $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2x - 1 \wedge X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1 = X^2 - X + 1$.
3. $X^n - 1 \wedge (X-1)^n = X - 1$ car 1 est racine simple de $X^n - 1$ et la seule racine dans $\mathbb{C}$ de $(X-1)^n$.
4. On détermine les racines complexes communes de $X^n - 1$ et $X^m - 1$. Ce sont les $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{n \wedge m}$ (déjà évoqué en arithmétique). Ainsi $X^n - 1 \wedge X^m - 1 = X^{n \wedge m} - 1$.

Solution C4.20

Soit $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.

1. On vérifie $P(3) = P'(3) = 0$ mais $P''(3) \neq 0$.
2. On calcule un premier quotient $P = (X-3)^2(X^2+X+1)$ et X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. On a donc la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$. Puis dans $\mathbb{C}[X]$: $P = (X-3)^2(X-j)(X+j)$.

Solution C4.25

1. $Q = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
2. Soit $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Vérifier que 1 et -1 sont racines de $X^{4m+2} - 2X^{2n+1} + 2X^{2p+1} - X^{2q}$.

Solution C4.26

1. $X^4 + X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$,
   $X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{i\frac{2\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{2\pi}{3}})$.
   Autre méthode : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2)^2 + X^2 + 1 = (X^2 - e^{i\frac{2\pi}{3}})(X^2 - e^{-i\frac{2\pi}{3}})$ puis calcul de racines carrées.
2. $X^6 + 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{5}\left(X - e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)}\right) = (X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$.
3. $(X^2-X+1)^2+1 = (X^2-X+1+i)(X^2-X+1-i)$ puis calcul des racines de chaque trinôme (on fait le premier puis celles du deuxième sont leurs conjugués).
4. $A = (X^2-X+1)^2+1 = (X^2-X+1-i)(X^2-X+1-i)$. Puis on calcule les racines de ces trinômes : celles de $X^2-X+1-i$ sont $1+i$ et $-i$. Celles de $X^2-X+1-i$ sont donc nécessairement leurs conjuguées : $1-i$ et i.
   Ainsi $A = (X-i)(X+i)(X-1+i)(X-1-i)$. Et sur $\mathbb{R}$: $A = (x^2+1)(x^2-2x+2)$.
5. $(X-1)(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1) = X^7-1$ donc (par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de X^7-1 par $X-1$) : $X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{6}\left(X - e^{ik\frac{2\pi}{7}}\right)$.
   Donc $X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{3}\left(X^2 - 2\cos\left(k\frac{2\pi}{7}\right)+1\right)$.
6. On utilise X^2+X+1, composé avec X^4 : $X^8+X^4+1 = (X^4-j)(X^4+j)$. Les racines quatrièmes de j sont $\{e^{i\left(\frac{2\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}\}$. Les racines de X^4+j sont les conjuguées de celles-ci. Cela donne les 8 racines dans $\mathbb{C}$ puis on regroupe les conjugués pour obtenir des trinômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.
   Ou encore : $X^8+X^4+1 = X^8+2X^4+1-X^4 = (X^4+1)^2-(X^2)^2 = (X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$ puis on utilise les factorisations de X^2+X+2 et X^2-X+1, composées avec X^2.
   Dans $\mathbb{R}[X]$ finalement : $X^8+X^4+1 = (X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.
   On vérifie ce qu'on a obtenu sur $\mathbb{C}$ en calculant les racines de tout ce petit monde : $\pm e^{\pm\frac{\pi}{6}}, \pm e^{\pm\frac{7\pi}{6}}$.