Chapitre D5

Dimension finie

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les x_i sont des vecteurs de E et les λ_i sont des scalaires de $\mathbb{K}$.

1 Familles libres, bases

Définition D5.1

On dit que la famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est **liée** (ou que les vecteurs sont **linéairement dépendants**) s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Une famille qui n'est pas liée est composée de vecteurs **linéairement indépendants**. On dit qu'elle est **libre**.

Remarque. Dire qu'une famille est liée revient à dire que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Proposition D5.2

Une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre si et seulement si pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Définition D5.3

On dit qu'une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème et définition D5.4

Une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des x_i :

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ forme la famille des **composantes** (ou **coordonnées**) de x dans la base $(x_1, \dots, x_n)$.

Définition D5.5

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Sinon on dit qu'il est de **dimension infinie**.

Lemme D5.6

(i) Étant donnée $\mathcal{L} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E et $x \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$, la famille $(x_1, \dots, x_n, x)$ est aussi une famille libre de E.

(ii) Étant donnée $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, on a

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Théorème D5.7 (de la base incomplète)

Soit $p, q, n \in \mathbb{N}^*$. Étant données dans E

➢ une famille libre $\mathcal{L} = (\ell_1, \dots, \ell_p)$,

➢ une famille génératrice $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$,

il existe une base $\mathcal{B}$ de E de la forme

$$\mathcal{B} = (\ell_1, \dots, \ell_p, \ell_{p+1}, \dots, \ell_n)$$

avec $\ell_{p+1}, \dots, \ell_n \in \mathcal{G}$.

Remarque. Ce théorème a trois conséquences très utiles.

- Théorème d'existence de base : tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie admet une base.
- Théorème de la base incomplète : étant donnée une famille libre dans un ev E de dimension finie, on peut la compléter en une base de E.
- Théorème de la base extraite : étant donnée une famille génératrice d'un ev E de dimension finie, on peut en extraire une base de E.

Théorème D5.8

Le cardinal d'une famille libre de E est toujours plus petit que le cardinal d'une famille génératrice.

Théorème et définition D5.9

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont même cardinal, appelé **dimension** de E et noté $\dim E$.

Remarque. Par convention la dimension de l'espace $\{0\}$ est 0.

Théorème D5.10

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.

(i) Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $p \leqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

(ii) Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $p \geqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème D5.11

Soit F un sev de E. Alors

(i) $\dim F \leqslant \dim E$,

(ii) $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

Théorème D5.12

Soit E un ev de dimension n. Soit F et G deux sev de E munis des bases respectives $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$. Alors on a équivalence entre

(i) $E = F \oplus G$,

(ii) $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E.

Remarque. Ce théorème a deux conséquences intéressantes.

- En termes de dimensions, si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.
- En dimension finie, tout sev admet un supplémentaire.

Théorème D5.13 (Formule de Grassmann)

Soit F et G deux sev de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Remarque. Par conséquent, parmi les trois conditions suivantes, il suffit d'en établir deux pour montrer que $E = F \oplus G$:

(1) $F \cap G = \{0_E\}$,

(2) $F + G = E$,

(3) $\dim F + \dim G = \dim E$.

3 Applications linéaires

3.1 Détermination d'une application linéaire

Théorème D5.14

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Étant donnée une famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F, il existe une unique application $u : E \to F$ telle que pour tout i, $u(e_i) = f_i$. De plus,

- u est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre,
- u est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.

Corollaire D5.15

Avec les notations précédentes, F est isomorphe à E si et seulement si $\dim F = \dim E = n$.

Remarque. Ceci permet d'établir un isomorphisme entre tout $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathbb{K}^n$.

Corollaire D5.16

Étant donnés E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie, on a

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Proposition D5.17

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux ev de même dimension finie. Alors on a équivalence entre

(i) u est injective,

(ii) u est surjective,

(iii) u est un isomorphisme.

Proposition D5.18

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors on a équivalence entre

(i) u est inversible à gauche,

(ii) u est inversible à droite,

(iii) u est inversible.

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition D5.19 (Rang)

(i) Soit E un ev de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de u la dimension de $\mathrm{Im}\, u$.

Notations. On note ces quantités $\mathrm{rg}\,\mathcal{F}$ et $\mathrm{rg}\, u$.

Proposition D5.20

Étant donnée $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on a

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}(u(e_1), \ldots, u(e_n)).$$

Proposition D5.21

Soit E, F, G trois ev de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

(i) $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

(ii) Si v est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.

(iii) Si u est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.

Théorème D5.22 (du rang)

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \mathrm{rg}\, u.$$

3.3 Hyperplans

Définition D5.23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) On appelle forme linéaire toute application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$.

(ii) On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et on appelle **espace vectoriel dual de** E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Définition D5.24

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle **hyperplan** de E tout sev de E qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Théorème D5.25 (Caractérisation des hyperplans)

Soit H un sev de E. Alors on a équivalence entre

(i) H est un hyperplan de E,

(ii) il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$.

Théorème D5.26 (Caractérisation des hyperplans en dimension finie)

Soit H un sev de E, un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors on a équivalence entre

(i) H est un hyperplan de E,

(ii) $\dim(H) = n - 1$.

Théorème D5.27

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E et H un hyperplan de E. Alors

(i) H admet une équation cartésienne dans la base $\mathcal{E}$, *i.e.* il existe $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que pour tout $x \in E$ de composantes $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans la base $\mathcal{E}$,

$$x \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

(ii) Deux équations cartésiennes de H dans une même base sont proportionnelles. Autrement dit : soit $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$ deux équations cartésiennes de H dans la base $\mathcal{E}$ (avec les notations évidentes). Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $b_i = \lambda a_i$.

Théorème D5.28

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

(i) Soit $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille d'hyperplans de E. Alors $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant n - p$.

(ii) Soit F un sev de E de dimension $n - p$ avec $p \in [\![0, n]\!]$. Alors il existe $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille d'hyperplans de E telle que $F = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i$.

Méthodes

- Vérifier qu'une famille de vecteurs est une base.
- Montrer qu'une application linéaire est bijective en utilisant l'égalité des dimensions.
- Déterminer un supplémentaire d'un sev.
- Montrer que deux sev sont supplémentaires
  - ➢ par caractérisation par les bases,
  - ➢ par caractérisation par la dimension.
- Déterminer le noyau ou l'image d'une application linéaire, connaissant l'autre, à l'aide du théorème du rang.
- Déterminer une application linéaire
  - ➢ par l'image des vecteurs d'une base,
  - ➢ par sa restriction sur des sev supplémentaires.