Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Soit $N \geqslant 2$. On lance N fois une pièce équilibrée. On suppose que les différents lancers sont mutuellement indépendants. Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on note F_n l'événement « Face apparaît au n-ème lancer ».

A Un premier événement

1. Proposer un espace probabilisé (Ω, P) qui modélise cette expérience aléatoire.

Alice et Bob observent les lancers, et jouent au jeu suivant :

- Alice est déclarée gagnante dès que la suite de lancers « Face, Pile, Pile » apparaît.
- Bob est déclaré gagnant dès que la suite de lancers « Pile, Pile, Face » apparaît.

Lorsqu'un joueur est déclaré gagnant, l'autre est déclaré perdant. Si aucune des deux suites de lancers n'apparaît, il n'y a ni gagnant ni perdant.
Pour tous $p \in [\![1, N]\!]$ et $n \in [\![0, N+1-p]\!]$, on note $W_{p,n}$ l'événement « lors des n lancers p, $p+1$, ..., $p+n-1$, il n'y a jamais eu deux Piles consécutifs ».

2. Justifier que $P(W_{p,n})$ ne dépend que de n et pas de p. On pose alors $w_n = P(W_{p,n})$.
3. Calculer w_1, w_2 et w_3.
4. (a) Soit $n \in [\![1, N-2]\!]$. Justifier soigneusement que $W_{1,n+2} \cap \overline{F_1} = \overline{F_1} \cap F_2 \cap W_{3,n}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in [\![1, N-2]\!]$, $w_{n+2} = \dfrac{1}{2} w_{n+1} + \dfrac{1}{4} w_n$.
5. Montrer que $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $w_n \leqslant 2 \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$.

B Existence d'un gagnant

Pour $n \in [\![1, N]\!]$, on définit les événements suivants.

— C_n : « aucun joueur n'a gagné la partie lors des n premiers lancers ».
— T_n : « un des deux joueurs est déclaré gagnant à l'issue du n-ème lancer ».

6. Calculer les probabilités des événements T_1, T_2, T_3.
7. (a) Soit $n \in [\![2, N]\!]$. Montrer soigneusement que : $P(C_n) = \dfrac{1}{2^n} + w_n$. *Indication : montrer qu'on peut écrire l'événement C_n comme la réunion de deux événements incompatibles.*
   (b) Calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} P(C_N)$. Interpréter ce résultat.
8. Soit $n \in [\![3, N]\!]$.
   (a) Exprimer T_n à l'aide des événements C_n et C_{n-1}.
   (b) En déduire : $P(T_n) = \dfrac{1}{2^n} + w_{n-1} - w_n$.

C Chances de gain

Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on note

- a_n la probabilité de l'événement A_n : « Alice est déclarée gagnante à l'issue du n-ème lancer »,
- b_n la probabilité de l'événement B_n : « Bob est déclaré gagnant à l'issue du n-ème lancer ».

On considère enfin les événements

- A : « Alice est déclarée gagnante au cours de la partie ».
- B : « Bob est déclaré gagnant au cours de la partie ».

9. Calculer a_3, b_3, a_4, b_4.
10. Montrer soigneusement que $\forall n \in [\![3, N]\!]$, $b_n = \dfrac{1}{2^n}$. *Indication : commencer par déterminer l'événement B_n.*
11. En déduire une expression de a_n à l'aide des termes de la suite w, pour tout $n \in [\![3, N]\!]$.
12. Déterminer les probabilités des événements A et B et leur limite lorsque N tend vers $+\infty$. Commenter le résultat obtenu.

Problème 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de E est dit **stable** par f lorsque $\forall x \in V,\ f(x) \in V$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \mathrm{Im}(f^n)$ et $G_n = \mathrm{Ker}(f^n)$.

1. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et G_n sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$ et $G_n \subset G_{n+1}$.
   Par une récurrence qu'on ne détaillera pas, on peut alors démontrer que pour tous $k \leq n$ entiers, $F_n \subset F_k$ et $G_k \subset G_n$, ce dont on pourra se servir dans la suite du problème.
2. On appelle **cœur** de l'endomorphisme f l'ensemble $\mathcal{C}$ défini par : $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On rappelle que cela signifie que $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in F_n$.
   On appelle **nilespace** de l'endomorphisme f l'ensemble $\mathcal{N}$ défini par : $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n$. On rappelle que cela signifie que $x \in \mathcal{N}$ si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N},\ x \in G_n$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{N}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Démontrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont stables par f.
   (c) Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathcal{N} = \{0\}$.
   (d) Démontrer que f est surjective si et seulement si $\mathcal{C} = E$.
   (e) Déterminer $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ lorsque f est un automorphisme de E.
3. Dans toute cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$.
   (a) Établir que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $F_{n+p} = F_n$.
   (b) Justifier l'existence d'un plus petit entier n tel que $F_n = F_{n+1}$. Ce plus petit entier est noté dans la suite r.
   (c) Démontrer que $\mathcal{C} = F_r$.
   (d) Démontrer que $E = \mathcal{C} + G_r$.

4. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier n tel que $G_n = G_{n+1}$.

   (a) Etablir que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $G_{n+p} = G_n$.

   (b) Justifier l'existence d'un plus petit entier n tel que $G_n = G_{n+1}$. Ce plus petit entier est noté dans la suite s.

   (c) Démontrer que $\mathcal{N} = G_s$.

   (d) Démontrer que $F_s \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

5. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$ et $G_{n+1} = G_{n+2}$. Montrer que $G_n = G_{n+1}$.

6. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_n = G_{n+1}$ et $F_{n+1} = F_{n+2}$. Montrer que $F_n = F_{n+1}$.

7. On suppose les conditions des questions 3 et 4 réalisées, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit entier naturel, noté toujours r, tel que $F_r = F_{r+1}$ et qu'il existe un plus petit entier naturel, noté toujours s, tel que $G_s = G_{s+1}$. On suppose de plus que r et s sont tous les deux non nuls.

   (a) Montrer que $r = s$.

   (b) Etablir que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont supplémentaires dans E.

   (c) Montrer que $f_{|\mathcal{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ est bien définie et qu'elle est bijective.

   (d) Montrer que $f_{|\mathcal{N}} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ est bien définie et qu'elle est nilpotente, c'est-à-dire qu'une de ses puissances est l'application nulle.

8. Dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$.

   (a) Trouver un endomorphisme de E tel que r existe mais s n'existe pas.

   (b) Trouver un endomorphisme de E tel que s existe mais r n'existe pas.

   (c) Trouver un endomorphisme de E tel que r et s n'existent pas.

Problème 3

Dans ce problème, on étudie la possibilité d'un prolongement de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\cos x)^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et calculer sa dérivée.

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$

3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, le prolongement de f à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ainsi obtenu sera encore appelé f.

4. (a) En utilisant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $f'(0)$.

   (b) Vérifier le résultat obtenu à la question précédente, en calculant la limite du taux d'accroissement de f en 0.

5. (a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{(\cos x)^{\frac{2}{\pi}}}{x - \frac{\pi}{2}} \times \exp\left[\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos x)\right].$$

(b) Montrer $\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{\pi}{2} - x$.

(c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(\cos x)^{\frac{2}{\pi}}}{x-\frac{\pi}{2}}$.

(d) Déduire de la question 5b que $\ln(\cos x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \ln\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

(e) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$.

(f) f est-elle dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$? Que peut-on dire de la courbe représentative de f en ce point ?