Problème 1

1. On peut considérer qu'une issue de cette expérience aléatoire est une suite de N résultats d'un lancer (*i.e.* Pile ou Face). Ainsi on peut prendre pour univers : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^N$. Comme les lancers sont supposés mutuellement indépendants et la pièce est équilibrée, chaque suite de N Pile ou Face a la même probabilité d'apparaître : $\dfrac{1}{2^N}$. Ainsi on munit Ω de la probabilité uniforme.

$$\boxed{\text{Espace probabilisé : } \Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^N \text{ muni de la probabilité uniforme}}.$$

2. Comme les lancers sont supposés mutuellement indépendants et la pièce est équilibrée, chaque suite de n résultats de lancer de pièce à la même probabilité d'apparaître. Notons u_n le nombre de suites de n Pile ou Face n'ayant pas deux Pile consécutifs. On a alors : $P(W_{p,n}) = \dfrac{u_n}{2^n}$.

$$\boxed{P(W_{p,n}) \text{ ne dépend que de } n \text{ et pas de } p}.$$

3. En reprenant la notation u_n précédente, on a $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $u_3 = 5$. En effet, une seule suite de deux Pile ou Face contient deux Pile consécutifs : (Pile, Pile), et seulement 3 suites de trois Pile ou Face contiennent deux Pile consécutifs : (Pile, Pile, Pile), (Pile, Pile, Face) et (Face, Pile, Pile). Ainsi, d'après ce qui précède :

$$\boxed{w_1 = 1}, \boxed{w_2 = \frac{3}{4}} \text{ et } \boxed{w_3 = \frac{5}{8}}.$$

4. (a) Soit $n \in [\![N-2]\!]$. Si, lors des $n+2$ premiers lancers, on obtient un Pile en premier et on n'a jamais deux Pile consécutifs, alors nécessairement, on a obtenu Face en second. Puis lors des n lancers suivants, on a jamais eu deux Pile consécutifs. C'est-à-dire que

$$W_{1,n+2} \cap \overline{F_1} \subset \overline{F_1} \cap F_2 \cap W_{3,n}.$$

Réciproquement, si l'événement $\overline{F_1} \cap F_2 \cap W_{3,n}$ est réalisé, on a obtenu Pile, Face, puis n lancers sans deux Piles consécutifs, donc en particulier, $n+2$ lancers sans deux Piles consécutifs et Pile en premier. Donc

$$\boxed{W_{1,n+2} \cap \overline{F_1} = \overline{F_1} \cap F_2 \cap W_{3,n}}.$$

(b) Soit $n \in [\![1, N-2]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, avec le système complet $\left(F_1, \overline{F_1}\right)$,

$$w_{n+2} = P(W_{1,n+2}) = P(W_{1,n+2} \cap F_1) + P\left(W_{1,n+2} \cap \overline{F_1}\right).$$

— D'après la question précédente, $W_{1,n+2} \cap \overline{F_1} = \overline{F_1} \cap F_2 \cap W_{3,n}$. Comme les lancers sont mutuellement indépendants, les événements $\overline{F_1}$, F_2 et $W_{3,n}$ sont mutuellement indépendants car ne concernent que des lancers distincts. Ainsi

$$P\left(W_{1,n+2} \cap \overline{F_1}\right) = P\left(\overline{F_1}\right) P(F_2) P(W_{3,n}) = \frac{1}{4} w_n.$$

— On montre comme à la question précédente que $W_{1,n+2} \cap F_1 = F_1 \cap W_{2,n+1}$. Et de la même manière, F_1 et $W_{2,n}$ sont indépendants. Donc

$$P(W_{1,n+2} \cap F_1) = P(F_1) P(W_{2,n+1}) = \frac{1}{2} w_{n+1}.$$

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N-2]\!]\,,\ w_{n+2} = \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{4}w_n}$$

5. On montre le résultat par récurrence double.

   Init. On a $w_1 = 1$, $2 \times \frac{6}{7} = \frac{12}{7} \geq 1$, $w_2 = \frac{3}{4}$ et $2 \times \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{72}{49} \geq 1$. Donc le résultat est vérifié pour $n = 1$ et $n = 2$.

   Hér. Soit $n \in [\![1, N-2]\!]$. On suppose le résultat vrai pour n et $n+1$. D'après la question précédente,
   $$w_{n+2} = \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{4}w_n \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^n = \frac{19}{14}\left(\frac{6}{7}\right)^n.$$
   Or $19\times 7 = 18\times 7+7 \leqslant 18\times 8 = 2\times 2\times 6^2$. On en déduit $\frac{19}{14} \leqslant 2\times\left(\frac{6}{7}\right)^2$. Donc $w_{n+2} \leqslant 2\left(\frac{6}{7}\right)^{n+2}$.

   On a montré par récurrence double que
   $$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!]\,,\ w_n \leqslant 2\left(\frac{6}{7}\right)^n}.$$

6. Aucun joueur ne peut gagner lors des deux premiers lancers, donc $\boxed{P(T_1) = P(T_2) = 0}$.
   T_3 est réalisé si et seulement si les trois premiers tirages sont (Pile,Pile, Face) ou (Face, Pile, Pile). Autrement dit
   $$T_3 = \left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3\right) \cup \left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}\right).$$
   L'union est disjointe et F_1, F_2 et F_3 sont mutuellement indépendants, donc
   $$\boxed{P(T_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}}.$$

7. (a) Soit $n \in [\![3, N]\!]$. Supposons C_n réalisé, ce qui équivaut à dire que les séquences (Pile, Pile, Face) et (Face, Pile, Pile) ne sont jamais apparues lors des n premiers lancers. Il y a donc deux cas incompatibles possibles :
   - soit il n'y a jamais eu deux Pile consécutifs, *i.e.* que l'événement $W_{1,n}$ est réalisé,
   - soit il y a eu deux Pile consécutifs. Dans ce cas, lors d'un lancer qui a précédé ou suivi deux Pile consécutifs, on a eu Pile aussi. Nécessairement, on a donc eu n Pile de suite.

   Réciproquement, si un de ces deux cas est réalisé, alors les séquences (Pile, Pile, Face) et (Face, Pile, Pile) ne sont jamais apparues, et donc C_n est réalisé. Autrement dit, on a l'union disjointe suivante.
   $$W_{1,n} \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right) = C_n.$$
   Comme l'union est disjointe et les événements $F_1, \ldots, F_n$ sont mutuellement indépendants, on en déduit que
   $$\boxed{P(C_n) = w_n + \frac{1}{2^n}}.$$

(b) D'après la question 5, $0 \leqslant w_N \leqslant 2 \times \left(\frac{6}{7}\right)^N$. Comme $0 \leqslant \frac{6}{7} < 1$, on en déduit $\lim_{N \to +\infty} w_N = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc, par somme de limites,

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} P(C_N) = 0}.$$

Cela signifie que si on effectue une infinité de lancers, un joueur gagnera presque sûrement au bout d'un moment.

8. (a) Soit $n \in [\![3, N]\!]$. Supposons T_n réalisé. Alors un des joueurs a gagné à l'issue du n^e lancer. Cela signifie qu'aucun joueur n'avait gagné auparavant, *i.e.* C_{n-1} est réalisé et qu'un joueur a gagné au cours des n premiers lancers, *i.e.* $\overline{C_n}$ est réalisé.

Réciproquement, si $C_{n-1} \cap \overline{C_n}$ est réalisé, alors aucun joueur n'a gagné au cours des $n-1$ premiers lancers et un joueur a gagné au cours des n premiers lancers. Donc, nécessairement, un joueur a gagné à l'issue du n^e lancer, *i.e.* T_n est réalisé.

$$\boxed{T_n = C_{n-1} \cap \overline{C_n}}.$$

(b) Soit $n \in [\![3, N]\!]$. Par définition, on a $C_n \subset C_{n-1}$ car si aucun joueur n'a gagné au cours des n premiers lancers, alors en particulier aucun joueur n'a gagné au cours des $n-1$ premiers lancers. Or d'après la question précédente, $T_n = C_{n-1} \setminus C_n$. Donc

$$P(T_n) = P(C_{n-1}) - P(C_n) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} + w_{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2^n} + w_n\right)$$

$$\boxed{P(T_n) = \frac{1}{2^n} + w_{n-1} - w_n}.$$

9. — Alice gagne au 3^e lancer si et seulement si les trois premiers lancers donnent (Face, Pile, Pile). Donc $a_3 = \frac{1}{8}$.

— Bob gagne au 3^e lancer si et seulement si les trois premiers lancers donnent (Pile, Pile, Face). Donc $b_3 = \frac{1}{8}$.

— Alice gagne au 4^e lancer si et seulement si les quatre premiers lancers donnent (Pile, Face, Pile, Pile) ou (Face, Face, Pile, Pile). Donc $a_4 = \frac{1}{8}$.

— Bob gagne au 4^e lancer si et seulement si les quatre premiers lancers donnent (Pile, Pile, Pile, Face). Donc $b_4 = \frac{1}{16}$.

$$\boxed{a_3 = b_3 = a_4 = \frac{1}{8}} \text{ et } \boxed{b_4 = \frac{1}{16}}.$$

10. Soit $n \in [\![3, N]\!]$. Supposons que Bob gagne a l'issue du n^e lancer. Les trois derniers lancers donnent donc (Pile, Pile, Face). Le lancer précédent cette séquence ne peut donner Face car sinon Alice aurait gagné à l'issue du $(n-1)$-ème lancer. Ainsi le $(n-3)$-ème lancer avait donné Pile. Par récurrence, on montre que tous les lancers précédents ont nécessairement donné Pile. Donc il n'y a qu'une seule séquence de n Pile ou Face qui permet à Bob de gagner à l'issue du n-ème lancer. Autrement dit

$$B_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{F_i}\right) \cap F_n.$$

On en déduit par indépendance des lancers que

$$\boxed{b_n = \frac{1}{2^n}}.$$

11. Soit $n \in [\![3, N]\!]$. Par définition des événements, $T_n = A_n \cup B_n$ et cette union est disjointe. Donc $a_n + b_n = P(T_n)$.

$$\boxed{a_n = w_{n-1} - w_n}.$$

12. Par définition des événements, on a

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n \text{ et } B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n.$$

De plus, ces unions sont disjointes. Donc d'après les questions précédentes (et comme $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = \emptyset$),

$$P(B) = \sum_{n=3}^{N} b_n = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{2^n}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^N}}.$$

$$P(A) = \sum_{n=3}^{N} a_n = \sum_{n=3}^{N} (w_{n-1} - w_n)$$

$$\boxed{P(A) = w_2 - W_N = \frac{3}{4} - w_N}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} P(A) = \frac{3}{4}} \text{ et } \boxed{\lim_{N \to +\infty} P(B) = \frac{1}{4}}$$

Ainsi, Alice a asymptotiquement trois fois plus de chance de gagner que Bob. Cela s'explique par le fait que Bob ne peut gagner que si les deux premiers lancers donnent deux Pile (voir ce qui a été démontré en question 10). Dans les trois autre cas, la séquence (Pile, Pile, Face) ne pourra pas apparaître avant la séquence (Face, Pile, Pile), donc Alice gagnera toujours avant que Bob ne puisse gagner.

Problème 2

1. (a) Une composée d'endomorphismes est un endomorphisme, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{L}(E)$. Le noyau et l'image d'un endomorphisme de E sont des sous-espaces vectoriels de E.

$$\boxed{F_n \text{ et } G_n \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $x \in F_{n+1}$, il existe $a \in E$ tel que $x = f^{n+1}(a) = f^n(f(a))$ ceci montre que $x \in F_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} \subset F_n}.$$

   Soit $x \in G_n$, on a $f^n(x) = 0$ donc $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) = 0$ et par suite $x \in G_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ G_n \subset G_{n+1}}.$$

2. (a) Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel donc $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel puisque d'après la question 1b pour tout n entier naturel F_n est un sous-espace vectoriel.

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}.$$

Vérifions que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $\mathcal{N} \subset E$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ G_n \subset E$.
- $0 \in \mathcal{N}$ car $0 \in G_0$.
- Soit $(x, y) \in \mathcal{N}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, démontrons que $\lambda x + y \in \mathcal{N}$. On a

$$x \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ x \in G_k \text{ et } y \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N},\ y \in G_p.$$

Supposons que $k \leqslant p$, en utilisant la question 1b, on a $G_k \subset G_p$. On a ainsi $(x, y) \in G_p^2$, comme G_p est un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda x + y \in G_p \subset \mathcal{N}$. Même chose si on a $p < k$.

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}.$$

(b) Soit $x \in \mathcal{N}$, montrons que $f(x) \in \mathcal{N}$. On a $x \in \mathcal{N}$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in G_k$, c'est-à-dire $f^k(x) = 0$. On a alors $f(f^k(x)) = f^k(f(x)) = 0$ ce qui implique que $f(x) \in G_k$ donc $f(x) \in \mathcal{N}$.

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ est stable par } f}.$$

Soit $x \in \mathcal{C}$, montrons que $f(x) \in \mathcal{C}$. On a : $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x = f^n(y_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(f^n(y_n)) = f^n(f(y_n))$ donc $f(x) \in F_n$ et finalement $f(x) \in \mathcal{C}$.

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est stable par } f}.$$

(c) $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective, démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{H}_n \ :\ G_n = \{0\}$$

Ainsi, on a aura : $\mathcal{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \{0\}$

Init. Pour $n = 0$, on a $G_0 = \mathrm{Ker}(Id) = \{0\}$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Init. D'une part $\mathcal{N}$ contient $\{0\}$ car c'est un sev de E.
D'autre part, soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $G_n = \{0\}$. Soit $x \in G_{n+1}$, on a $f^{n+1}(x) = 0$ donc $f^n(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(x) \in G_n$ donc $f(x) = 0$. L'application f étant injective cela implique que $x = 0$, d'où $G_{n+1} = \{0\}$.

Ceci achève la récurrence et démontre que $\mathcal{N} = \{0\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement supposons que $\mathcal{N} = \{0\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $G_n = \{0\}$ en particulier $G_1 = \mathrm{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective.

$$\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } \mathcal{N} = \{0\}}.$$

(d) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est surjective et démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{H}_n \ :\ F_n = E$$

Ainsi, on aura $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$.

Init. Pour $n=0$, on a $F_0 = \mathrm{Im}(Id) = E$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $F_n = E$. Soit $y \in E$, $\exists x \in E,\ y = f^n(x)$, or l'application f est, par hypothèse, surjective : $\exists a \in E,\ f(a) = x$. Ainsi $y = f^n(f(a)) = f^{n+1}(a)$ et $y \in \mathrm{Im}(f^{n+1}) = F_{n+1}$. Ce qui démontre que $F_{n+1} = E$ et qui implique que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Cela achève la récurrence.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement si $\mathcal{C} = E$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = E$. En particulier $F_1 = \mathrm{Im} f = E$, ce qui montre la surjectivité de f.

$$\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } \mathcal{C} = E}.$$

(e) Si f est un automorphisme de E alors f est bijective donc surjective et injective. D'après les deux questions précédentes, on a

$$\boxed{\mathcal{N} = \{0\} \text{ et } \mathcal{C} = E}.$$

3. (a) Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{H}_p \ :\ F_{n+p} = F_n$.

Init. Pour $p = 0$, la propriété est évidente.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $F_{n+p} = F_n$, démontrons que $F_{n+p+1} = F_n$.
D'après la question 1b, on a $F_{n+p+1} \subset F_n$.
Réciproquement, soit $y \in F_n$. Alors $y \in F_{n+p}$ donc il existe $x \in E$ tel que $f^{n+p}(x) = y$, c'est-à-dire $f^p(f^n(x)) = y$. On a $f^n(x) \in F_n$ donc d'après l'hypothèse de la question $F_n = F_{n+1}$, on a $a \in E$ tel que $f^n(x) = f^{n+1}(a)$ donc $y = f^{n+p+1}(a)$, c'est-à-dire $y \in F_{n+p+1}$. D'où $F_n = F_{n+p+1}$, ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ F_{n+p} = F_n}.$$

(b) On considère $\{n \in \mathbb{N},\ F_n = F_{n+1}\}$, d'après l'hypothèse de la question cet ensemble est non vide. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum, d'où l'existence de r.

(c) Pour tout $k \leqslant r$, on a $F_r \subset F_k$ d'après la question 1b donc $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{r} F_k = F_r$.

D'autre part, d'après la question 3a, pour tout $k \geqslant r$, $F_k = F_r$. Finalement : $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = F_r$.

$$\boxed{\mathcal{C} = F_r}.$$

(d) D'après la question précédente, il s'agit de démontrer que $E = F_r + G_r$. Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse pour se donner des idées. À noter qu'on ne demande pas l'unicité d'une décomposition (et d'ailleurs on n'y aboutira pas dans l'analyse.

Ana. Soit $y \in F_r$ et $z \in G_r$ tels que $x = y + z$.
L'application f^r étant linéaire et z appartenant à $\mathrm{Ker}(f^r)$, on a $f^r(x) = f^r(y)$. D'après la question 3a, on a $F_r = F_{2r}$, comme $f^r(x) \in F_r$, on a $f^r(x) \in F_{2r}$ donc il existe $a \in E$ tel que $f^r(x) = f^{2r}(a)$. On observe alors que $f^r(x - f^r(a)) = 0_E$.
On est alors tenté de poser $y = f^r(a)$ et on obtient la décomposition $x = f^r(a) + x - f^r(a)$.

Syn. Cette décomposition convient car $f^r(a) \in F_r$ et $x - f^r(a) \in G_r$ car $f^r(x - f^r(a)) = f^r(x) - f^{2r}(a) = 0$.

Ceci montre que $E inc \mathcal{C} + G_r$, la réciproque étant immédiate pour une somme de sev de E. Donc

$$\boxed{E = \mathcal{C} + G_r}.$$

4. (a) Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{H}_p\ :\ G_{n+p} = G_n$.

   $\boxed{\textbf{Init.}}$ Pour $p = 0$ la propriété est évidente.

   $\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $G_{n+p} = G_n$, démontrons que $G_{n+p+1} = G_n$.
   D'une part, d'après la question 1b, on a toujours $G_n \subset G_{n+p+1}$.
   Réciproquement, soit $x \in G_{n+p+1}$. On a $f^{n+p+1}(x) = 0$ donc $f^{n+1}(f^p(x)) = 0$, c'est-à-dire que $f^p(x) \in G_{n+1} = G_n$ d'où $f^n(f^p(x)) = 0$ et donc $x \in G_{n+p} = G_n$. Finalement $G_{n+p+1} = G_n$ ce qui démontre $\mathcal{H}_{p+1}$.

   On a montré que
   $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ G_{n+p} = G_n}.$$

   (b) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ G_{n+1} = G_n\}$ est non vide par hypothèse de la question. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum, d'où l'existence de s.

   (c) D'après la question 1b, pour tout $k \leqslant s$, on a $G_k \subset G_s$ et d'après la question précédente pour tout $k \geqslant s$, on a $G_k = G_s$. D'où
   $$\boxed{\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = G_s}.$$

   (d) D'après la question précédente, il s'agit de démontrer que $F_s \cap G_s = \{0\}$. Soit $x \in F_s \cap G_s$, on a
   $$\begin{cases} \exists a \in E,\ f^s(a) = x \\ f^s(x) = 0 \end{cases}$$
   On a ainsi $f^{2s}(a) = f^s(x) = 0$, donc $a \in G_{2s}$. Or $G_{2s} = G_s$ d'après la question 4a, ceci montre que $a \in G_s$ et par suite $x = f^s(a) = 0$.
   $$\boxed{F_s \cap \mathcal{N} = \{0\}}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inclusion $G_n \subset G_{n+1}$ est toujours vraie.
   Réciproquement, soit $x \in G_{n+1}$. On a $f^{n+1}(x) = 0$. On a $f^n(x) \in F_n = F_{n+1}$, donc il existe $a \in E$ tel que $f^n(x) = f^{n+1}(a)$. On a
   $$f^{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{n+2}(a) = 0 \Leftrightarrow a \in G_{n+2} \Leftrightarrow a \in G_{n+1} \Leftrightarrow f^{n+1}(a) = f^n(x) = 0$$
   donc $x \in G_n$, ce qui démontre que
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = F_{n+1} \text{ et } G_{n+1} = G_{n+2} \Rightarrow G_n = G_{n+1}}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inclusion $F_{n+1} \subset F_n$ est toujours vraie.
   Réciproquement, soit $y \in F_n$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^n(x)$. Ainsi $f(y) = f^{n+1}(x) \in F_{n+1} = F_{n+2}$. Donc il existe $a \in E$ tel que $f(y) = f^{n+1}(x) = f^{n+2}(a)$. On a
   $$f^{n+1}(x) = f^{n+2}(a) \Leftrightarrow f^{n+1}(x) - f^{n+2}(a) = 0 \Leftrightarrow f^{n+1}(x - f(a)) = 0 \Leftrightarrow x - f(a) \in G_{n+1} = G_n,$$
   donc $f^n(x - f(a)) = 0$, c'est-à-dire $f^n(x) = f^{n+1}(a)$ d'où $y = f^{n+1}(a)$ et donc $y \in F_{n+1}$.
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ G_n = G_{n+1} \text{ et } F_{n+1} = F_{n+2} \Rightarrow F_n = F_{n+1}}.$$

7. (a)
   - Supposons dans un premier temps que $r > s$. On a $\forall k \geqslant s$, $G_k = G_{k+1}$, en particulier $G_{r-1} = G_r$ (puisque $r - 1 \geqslant s$) et $F_{r+1} = F_{r+2}$. D'après la question 6, ces deux égalités impliquent que $F_{r-1} = F_r$ ce qui est contradictoire avec la minimalité de r.

- Supposons que $s > r$. On a $\forall k \geqslant r$, on a $F_k = F_{k+1}$, en particulier $F_{s-1} = F_s$ (puisque $s-1 \geqslant r$) et $G_s = G_{s+1}$. D'après la question 5, ces deux égalités impliquent que $G_{s-1} = G_s$ ce qui est contradictoire avec la minimalité de s.

Finalement, $\boxed{r = s}$.

(b) D'après les questions 3c et 4c, on a $\mathcal{C} = F_r$ et $\mathcal{N} = G_s$. Comme $r = s$ et d'après les questions 3d et 4d, on a $E = \mathcal{C} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ d'où :

$$\boxed{E = \mathcal{C} \oplus \mathcal{N}}.$$

(c) L'application $f_{|\mathcal{C}}$ est bien à valeurs dans $\mathcal{C}$ puisque, d'après la question 2b, $\mathcal{C}$ est stable par f. La restriction d'une application linéaire est linéaire, donc $f_{|\mathcal{C}}$ est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

- Pour l'injectivité, prenons $x \in \operatorname{Ker}(f_{|\mathcal{C}})$. On a $x \in \mathcal{C} = F_r$ donc il existe $a \in E$ tel que $f^r(a) = x$ ainsi $f^{r+1}(a) = f(x) = 0$ donc $a \in G_{r+1} = G_r$ (car $r = s$). Ce qui démontre que $x = f^r(a) = 0$ et par suite $\operatorname{Ker}(f_{|\mathcal{C}}) = \{0\}$, d'où l'injectivité de $f_{|\mathcal{C}}$.
- Pour la surjectivité, prenons $y \in \mathcal{C} = F_r$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$. Or $F_r = F_{r+1}$, il existe $u \in E$ tel que $y = f^r(x) = f^{r+1}(u)$ donc $y = f(f^r(u))$ et on a bien $f^r(u) \in \mathcal{C}$ qui est un antécédent de y par $f_{|\mathcal{C}}$.

$$\boxed{f_{|\mathcal{C}} \text{ est surjective}}.$$

(d) Par le même raisonnement qu'à la question précédente, comme $\mathcal{N}$ est stable par f, on a : $f_{|\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ qui est linéaire, donc $f_{|\mathcal{N}}$ est un endomorphisme de $\mathcal{N}$. Pour tout $x \in \mathcal{N} = G_r$, on $f^r(x) = 0$, c'est-à-dire que $(f_{|\mathcal{N}})^r = 0$, ceci toujours en utilisant le fait que $r = s$.

$$\boxed{f_{|\mathcal{N}} \text{ est nilpotente}}.$$

8. (a) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$.

L'application Δ est linéaire et par une récurrence élémentaire, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rccc} \Delta^n : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P^{(n)} \end{array}$$

On a, pour tout entier naturel n, $F_n = \mathbb{R}[X]$. En effet pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il suffit de primitiver n fois P pour obtenir un antécédent de P par Δ^n (qui sera bien un polynôme). En particulier, on a $F_0 = F_1$ et donc $r = 0$.

Par contre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \operatorname{Ker}(\Delta^n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (que l'on peut aisément obtenir par récurrence par exemple) et $G_0 = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}) = \{0\}$. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n \neq G_{n+1}$ donc s n'existe pas.

(b) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\begin{array}{rccc} \Gamma : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & XP \end{array}$.

L'application Γ est linéaire et une récurrence élémentaire donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rccc} \Gamma^n : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & X^n P \end{array}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \{0\}$ donc $s = 0$.

Par contre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \operatorname{Im}(\Gamma^n) = \{Q \in \mathbb{R}[X],\ X^n | Q\}$, ainsi $F_n \neq F_{n+1}$ et donc r n'est pas défini.

(c) Ce contre-exemple est bien plus difficile à trouver. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ noté ζ et défini par

$$\begin{cases} \zeta(X^n) = X^{n+1} \text{ si } n \text{ n'est pas une puissance de } 2 \\ \zeta(X^n) = 0 \text{ si } n \text{ est une puissance de } 2 \end{cases}$$

La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{R}[X]$, connaître les images par ζ de ces vecteurs suffit à connaître ζ.

- Soit k un entier naturel. On a

$$\zeta^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1+2^k-1} = X^{2^{k+1}}$$
$$\zeta^{2^k}(X^{2^k+1}) = 0$$

  Ainsi $X^{2^k+1} \in \operatorname{Ker}(\zeta^{2^k})$ mais $X^{2^k+1} \notin \operatorname{Ker}(\zeta^{2^k-1})$. La suite des noyaux (G_n), n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui démontre que s n'existe pas.
- Soit k un entier naturel. On a $X^{2^{k+1}} \in F_{2^k-1}$ puisque : $\zeta^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^{k+1}}$. Par contre $X^{2^{k+1}} \notin F_{2^k}$, pour le démontrer supposons par l'absurde que $\zeta^{2^k}(X^\ell) = X^{2^{k+1}}$. Il y a deux cas à considérer :

  Si $\ell \geqslant 2^{k+1}+1$, alors $\zeta^{2^k}(X^\ell)$ est nul ou bien de degré supérieur ou égal à $2^k + 2^{k+1} + 1 > 2^{k+1}$.

  Si $\ell \leqslant 2^{k+1}$, alors $\zeta^{2^k}(X^\ell) = 0$ car entre ℓ et $2^k + l - 1$, il y a une puissance de 2.

  Dans les deux cas c'est absurde. Ce qui démontre que F_{2^k} est strictement inclus dans F_{2^k-1} et la suite (F_n) n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang. L'indice r n'existe pas.

Problème 3

1. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right)$. cos est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x > 0$ donc par composition, $x \mapsto \ln(\cos x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Puis $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc par produit $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\cos x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, où exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Finalement par composition, f est bien définie et

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}.$$

   Pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on calcule

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\ln(\cos x) + \frac{-\sin x}{x\cos x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right) = -\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2} + \frac{\tan x}{x}\right)f(x).$$

   D'où

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) = -\left(\frac{\ln\cos x}{x^2} + \frac{\tan x}{x}\right)f(x)}$$

2. On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x) = -\infty$. On en déduit $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$. D'où

$$\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0, \text{ donc } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$$

3. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\ln(\cos x) = \ln(1+(\cos(x)-1))$. Et $\cos(x)-1 \xrightarrow{x\to 0} 0$ donc $\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.
Ainsi $\dfrac{1}{x}\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, par théorème de composition des limites. D'où

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 1, \text{ donc } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$$

4. (a) On a montré que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et que f est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En vertu du théorème de la limite de la dérivée, il suffit de démontrer que f' possède une limite finie en 0. On utilise pour cela l'expression de f' obtenue à la question 1 :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ f'(x) = -\left(\frac{\ln\cos x}{x^2} + \frac{\tan x}{x}\right) f(x).$$

Or on a :

- $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \tan'(0) = 1$.
- $\dfrac{\ln\cos x}{x^2} = \dfrac{\ln(1+\cos(x)-1)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$, donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, par opération sur les limites, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{-1}{2}$. Finalement,

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } f'(0) = \frac{-1}{2}.}$$

(b) On écrit le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}\right) - 1}{x}.$$

Or $\exp(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ et on a montré à la question 3 que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x} = 0$. On en déduit $\exp\left(\dfrac{\ln(\cos x)}{x}\right) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$, et donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

Or, d'après la question 4a, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$. Donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-1}{2}$, ce qui donne bien $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-1}{2}}.$$

5. (a) Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $(\cos x)^{\frac{2}{\pi}} \times \exp\left[\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos x)\right] = (\cos x)^{\frac{2}{\pi}} \times (\cos x)^{\frac{1}{x}-\frac{2}{\pi}} = f(x)$.
D'où

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{(\cos x)^{\frac{2}{\pi}}}{x - \frac{\pi}{2}} \times \exp\left[\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos x)\right]}.$$

(b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Comme $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ et $\sin u \underset{u \to 0}{\sim} u$, on en déduit

$$\boxed{\cos x \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x}.$$

(c) De la question précédente on déduit $(\cos x)^{\frac{2}{\pi}} \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{2}{\pi}}$, d'où

$$\frac{(\cos x)^{\frac{2}{\pi}}}{x - \frac{\pi}{2}} \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{2}{\pi}}}{x - \frac{\pi}{2}} \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\sim} -\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{2}{\pi}-1}.$$

Et comme $\frac{2}{\pi} - 1 < 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\cos x)^{\frac{2}{\pi}}}{x - \frac{\pi}{2}} = -\infty}$.

(d) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\frac{\pi}{2} - 1 < x$. On a

$$\frac{\ln(\cos x)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \ln\left(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}\right)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}\right)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$$

Comme $\cos x \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$, et donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}\right) = 0$.
Comme $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos x)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$.

$$\boxed{\ln(\cos x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

(e) On a $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos x) = \frac{2}{x\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ln(\cos x)$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{2}{x\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Comme $\lim\limits_{u \to 0^+} u \ln u = 0$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2}{x\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, et donc l'équivalent ci-dessus donne

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos x) = 0.$$

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \exp\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos x)\right] = 1.$$

D'après les questions précédentes,

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = -\infty}.$$

(f) On vient de montrer $\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{f(x)}{x-\frac{\pi}{2}} \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } \dfrac{\pi}{2}}$.

Comme le taux d'accroissement de f tend vers $-\infty$ lorsque x tends vers $\dfrac{\pi}{2}$, la courbe représentative de f admet en $\dfrac{\pi}{2}$ une demi-tangente verticale.