Devoir maison n° 17

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

On note $\mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et on considère E le sous-ensemble de $\mathbb{R}_3[X]$ formé des polynômes qui admettent 2 pour racine au moins double.

1. Donner un élément de E de degré supérieur ou égal à 3.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. En invoquant la division euclidienne par $(X-2)^2$, montrer que tout élément de $\mathbb{R}_3[X]$ s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme de E et d'un polynôme de degré au plus 1. En déduire que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
4. On définit l'application
$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(2), P'(2)) \end{array}.$$
   (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = E$.
   (c) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$.
5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par
$$f(1) = 1,\ f(X) = X^2,\ f(X^2) = X \text{ et } f(X^3) = X^3.$$
   (a) Donner l'image d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ?
6. Soient $S = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P\}$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = -P\}$.
   (a) Montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = S \oplus A$.
7. Soit $F = \operatorname{Vect}\{1 + X^3, X, X^2\}$.
   (a) Montrer que $A \subset F$.
   (b) Décrire les éléments de $F \cap S$.
8. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Montrer que le polynôme nul est le seul polynôme qui vérifie $f(P) = \lambda P$.

Problème 2

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^n}$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.
   Indication : calculer $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^n}$ *en utilisant les méthodes vues en cours, puis passez à la limite.*

(b) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha}$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.

Indication : attention ! α est un ***nombre complexe non réel*** *! Donc pas de* $\ln$ *hâtif pour le calcul de primitive. Écrivez $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer ensuite séparément les parties réelles et imaginaires de $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha}$ puis passez à la limite. Vous devriez trouver une limite égale à $i\pi$ si $b > 0$ et autre chose si $b < 0$...*

2. Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ sans pôle réel et telle que $\deg R \leqslant -2$. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des pôles de R et $\mathscr{P}^+$ l'ensemble des pôles de R de partie imaginaire strictement positive.

   (a) Écrire la décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{C}(X)$ (On ne demande pas de calculer les coefficients de chaque élément simple).

   (b) Pour tout $\alpha \in \mathscr{P}$, on appelle résidu de R en α, et on note $\mathrm{Res}_\alpha(R)$ le coefficient de $\dfrac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de R sur $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\sum_{\alpha \in \mathscr{P}} \mathrm{Res}_\alpha(R) = 0.$$

   Indication : calculez de deux manières $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xR(x)$.

   (c) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} R(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et établir la formule des résidus :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} R(t)\,\mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{\alpha \in \mathscr{P}^+} \mathrm{Res}_\alpha(R).$$

3. Application. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. En utilisant la formule des résidus, calculer

$$I = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} \frac{t^{2m}}{t^{2n}+1}\,\mathrm{d}t.$$

Indication : Vérifier qu'on peut appliquer la formule des résidus, puis déterminer tous les pôles de $R(X) = \dfrac{X^{2m}}{X^{2n}+1}$ de partie imaginaire strictement positive et leurs résidus. Simplifier ensuite le plus possible le résultat.