TD B7. Développements limités

1 Développements limités

Exercice B7.1 ✲

1. Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

   (a) $x \mapsto \sin x \cos x$ à l'ordre 5,

   (b) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3,

   (c) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4,

   (d) $x^2\sqrt{1+2x}$ à l'ordre 3,

   (e) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$ à l'ordre 3,

   (f) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$ à l'ordre 3,

   (g) $x \mapsto (1+2x)^x$ à l'ordre 5,

   (h) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$ à l'ordre 3,

   (i) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3,

   (j) $x \mapsto \sqrt{3+\cos x}$ à l'ordre 3.

2. Déterminer un équivalent en 0 de

   (a) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}} - e$,

   (b) $x \mapsto e^{x+1} - (1+x)^e - (e-1)$,

   (c) $x \mapsto \sqrt{3+\cos x} - 2$.

Exercice B7.2 ✲

Déterminer les développements limités en x_0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \sin x$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3,
2. $x \mapsto e^x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4.
4. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 3.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ en $x_0 = -2$ à l'ordre 3.
6. $x \mapsto \ln(\sin x)$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 2.
7. $x \mapsto \sin x \cos(3x)$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 2.
8. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ en $x_0 = 2$ à l'ordre 2.

Exercice B7.3 ✲✲

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Après avoir justifié son existence, déterminer le DL de f^{-1} à l'ordre 4 en 0.

Exercice B7.4 ✲

Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^x \ln(1+x)$. En déduire la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente à l'origine.

Exercice B7.5 ✲✲

Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes possèdent une asymptote en $+\infty$ et déterminer leur position relative à celle-ci au voisinage de $+\infty$.

1. $x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,
2. $x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$,
3. $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$.

Exercice B7.6 ✲✲

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice B7.7 ✲✲

Calculer un développement asymptotique de chacune des fonctions suivantes à la précision demandée et au voisinage du point indiqué.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$ en 0, à deux termes.
2. $x \mapsto x^x$ en 0 à la précision $(x \ln x)^2$.
3. $x \mapsto \sqrt{x^4+x+1} - x\sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$.
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x(e^x-1)} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0 à la précision x^2.

Exercice B7.8 ✲✲✲

Soit $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x \cos^n(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I$ tel que f_n atteigne son maximum sur I en x_n.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n$.
3. Montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
4. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f_n(x_n)$.
5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.

2 Formules de Taylor

Exercice B7.9 ✲

Montrer que $\left| e - \dfrac{163}{60} \right| \leqslant \dfrac{1}{240}$.

Exercice B7.10 ✲

À l'aide de la formule de Taylor reste intégral, démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

Exercice B7.11 ✿✿

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f et préciser $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ainsi que $f(0)$.
3. À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que
$$\forall u \in [-1,1],\ |e^{-u} - 1 + u| \leqslant \frac{3u^2}{2}.$$
4. En déduire que $\forall h \in [-1,1],\ \forall t \in [0,1],\ \left|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right| \leqslant h^2\frac{3t^2}{2}e^{-xt}$ puis que
$$\left|f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{3h^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
5. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^1 -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.