Problème 1

1. D'après les propriétés d'anneau de $\mathcal{L}(E)$,

$$g \circ h = (f - 3\,\mathrm{id}_E) \circ (f + \mathrm{id}_E) = f^2 - 3f + f - 3\,\mathrm{id}_E = f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E = 0$$
$$h \circ g = (f + \mathrm{id}_E) \circ (f - 3\,\mathrm{id}_E) = f^2 + f - 3f - 3\,\mathrm{id}_E = f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E = 0$$

Donc $\boxed{g \circ h = h \circ g = 0}$.

2. Soit $y \in \mathrm{Im}\, h$. Il existe $x \in E$ tel que $y = h(x)$. Ainsi $g(y) = g(h(x)) = (g \circ h)(x) = 0_E$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Ker}\, g = G}.$$

Soit $y \in \mathrm{Im}\, g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Ainsi $h(y) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) = 0_E$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, h = H}.$$

3. On a $G + H \subset E$. Soit $x \in E$. On montre qu'il existe un unique couple $(y, z) \in G \times H$ tel que $x = y + z$, par analyse-synthèse. Cela prouvera $E = G \oplus H$.

Analyse Soit $y \in G$ et $z \in H$ tels que $x = y + z$.
Comme $y \in G$, on a $g(y) = f(y) - 3y = 0_E$, soit $f(y) = 3y$.
De même, comme $z \in H$, on a $h(z) = f(z) + z = 0_E$, soit $f(z) = -z$.
On en déduit $f(x) = f(y) + f(z) = 3y - z$. Or

$$\begin{cases} x = y + z \\ f(x) = 3y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{4}\,(x + f(x)) \\ z = \dfrac{1}{4}\,(3x - f(x)) \end{cases}.$$

Synthèse Soit $y = \dfrac{1}{4}\,(x + f(x))$ et $z = \dfrac{1}{4}\,(3x - f(x))$. On vérifie alors

- $y + z = \dfrac{1}{4}\,(x + f(x)) + \dfrac{1}{4}\,(3x - f(x)) = x$.
- $g(y) = f(y) - 3y = \dfrac{1}{4}\big(f(x) + f^2(x) - 3x - 3f(x)\big) = \dfrac{1}{4}\big(f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E\big)(x) = 0_E$, d'où $y \in G$.
- $h(z) = f(z) + z = \dfrac{1}{4}\big(3f(x) - f^2(x) + 3x - f(x)\big) = \dfrac{-1}{4}\big(f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E\big)(x) = 0_E$, d'où $z \in H$.

On a donc montré que $\forall x \in E$, $\exists!(y, z) \in G \times H$, $x = y + z$. Donc $\boxed{E = G \oplus H}$.

4. (a) Soit $x \in E$. Il existe $(x_G, x_H) \in G \times H$ tel que $x = x_G + x_H$.
Comme $x_G \in G$, on a $g(x_G) = f(x_G) - 3x_G = 0_E$, soit $f(x_G) = 3x_G$.
De même, comme $x_H \in H$, on a $h(x_H) = f(x_H) + x_H$, soit $f(x_H) = -x_H$.
Ainsi, $f(x) = f(x_G) + f(x_H) = 3x_G - x_H$. Or, par définition de p et q, on a $p(x) = x_G$ et $q(x) = x_H$. On en déduit $f(x) = 3p(x) - q(x)$, donc $\boxed{f = 3p - q}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. p et q sont des projecteurs associés. Donc d'après une remarque de cours, $p \circ q = q \circ p = 0$ (facile à vérifier). En particulier, p et q commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

$$f^n = (3p - q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} p^k q^{n-k}$$

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n-1$, $p^k q^{n-k} = (pq) p^{k-1} q^{n-1-k} = 0$. Donc

- si $n > 0$, on obtient $f^n = 3^n p^n + (-1)^n q^n$. Enfin, comme p et q sont des projecteurs, on a $p^n = p$ et $q^n = q$. d'où : $f^n = 3^n p + (-1)^n q$,
- pour $n = 0$, cette égalité est bien vérifiée car $3^0 p + (-1)^0 q = p + q = \mathrm{id}_E = f^0$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = 3^n p + (-1)^n q}$.

5. (a) On a les relations $p + q = \mathrm{id}_E$ et $f = 3p - q$. On en déduit directement :

$$\boxed{p = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_E + f) \text{ et } q = \frac{1}{4}(3\,\mathrm{id}_E - f)}$$

(b) Cela découle directement des questions précédentes.

$$f^n = \frac{3^n}{4}(\mathrm{id}_E + f) + \frac{(-1)^n}{4}(3\,\mathrm{id}_E - f)$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}\mathrm{id}_E + \frac{3^n - (-1)^n}{4} f}$$

6. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f^2(x,y) &= f(5x - 4y, 3x - 3y) \\ &= (5(5x-4y) - 4(3x-3y), 3(5x-4y) - 3(3x-3y)) \\ &= (13x - 8y, 6x - 3y) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E)(x,y) &= f^2(x,y) - 2f(x,y) - 3(x,y) \\ &= (13x - 8y, 6x - 3y) - 2(5x - 4y, 3x - 3y) - 3(x,y) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E = 0}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f^2 - 2f - 3\,\mathrm{id}_E = 0$, d'après la question 5b, on a

$$\begin{aligned} f^n(x,y) &= \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}(x,y) + \frac{3^n - (-1)^n}{4} f(x,y) \\ &= \left(\frac{3^n + 3(-1)^n}{4} x + \frac{3^n - (-1)^n}{4}(5x - 4y), \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} y + \frac{3^n - (-1)^n}{4}(3x - 3y) \right) \end{aligned}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x,y) = \left(\frac{3^{n+1} - (-1)^n}{2} x - (3^n - (-1)^n)\, y, \frac{3^{n+1} - 3(-1)^n}{4} x + \frac{3(-1)^n - 3^n}{2} y \right)}$$

(c) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1}, v_{n+1}) = f(u_n, v_n)$. Ainsi on peut obtenir par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n, v_n) = f^n(u_0, v_0) = f^n(1, 0)$$

D'après la question précédente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^{n+1} - (-1)^n}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^{n+1} - 3(-1)^n}{4}}$$

Problème 2

Une urne contient des boules indiscernables au toucher, à savoir r boules rouges et b boules blanches avec r et b non nuls. On effectue des tirages successifs d'une boule. Après chaque tirage, on remet dans l'urne la boule tirée avec, en plus, c boules de la même couleur qu'elle (avec $c \in \mathbb{N}^*$ fixé au départ).

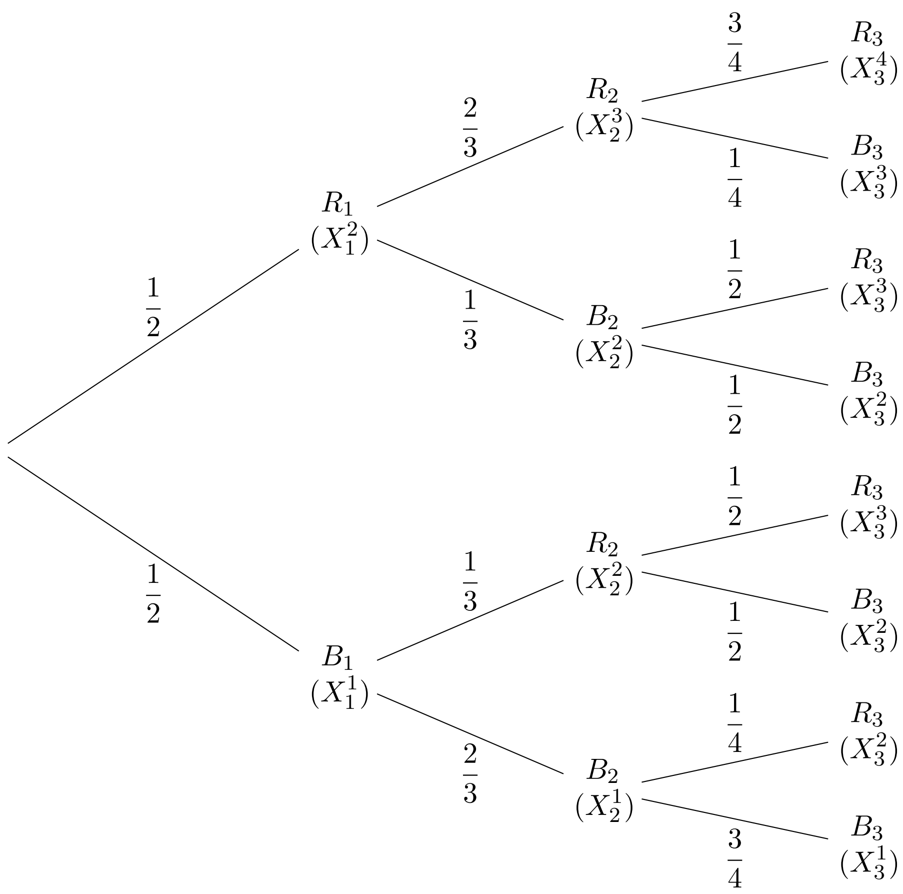
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle B_n l'événement « la n-ième boule tirée est blanche » et R_n l'événement « la n-ième boule tirée est rouge ».

On s'intéresse aussi à l'évolution du nombre de boules dans l'urne. Pour cela, étant donnés $n, k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement X_n^k : « il y a exactement k boules rouges dans l'urne à la fin du tirage n (sous-entendu après la remise des boules, juste avant le tirage $n+1$) ».

1. Dans cette question (et seulement dans celle-ci), on s'intéresse au cas particulier $r = b = c = 1$.

(a) L'urne contient initialement 1 boule rouge et 1 boule blanche. On effectue le tirage.
Si on a tiré une boule blanche (événement B_1), on en remet 2 et le nombre de boules rouges n'a pas changé, et réciproquement. Ainsi $B_1 = X_1^1$.
Si on a tiré une boule rouge (événement R_1), on en remet 2 et le nombre de boules rouges est de 2, et réciproquement. Ainsi $R_1 = X_1^2$.
Les événements B_1 et R_1 ont chacun une probabilité 1/2 (tirage équiprobable d'une boule dans une urne qui en contient 2). Ainsi, $\boxed{P(X_1^1) = P(X_1^2)}$.

(b) On a la situation suivante ; on a indiqué entre parenthèse l'événement X après tirage : après avoir tiré une boule rouge, le nombre de boules rouges augmente de $c = 1$.
Après chaque tirage, il y a une boule de plus dans l'urne, soit 2 au départ, 3 lors du 2^e^ tirage (après le premier), 4 lors du 3^e^. Les tirages de chaque boule sont équiprobables, ainsi la probabilité de tirer une boule rouge est le quotient du nombre de boules rouges par le nombre total de boules, et de même pour les boules blanches.



On lit cet arbre à l'aide de la formule des probabilités composées.

$P(X_2^1) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}$, donc $\boxed{P(X_2^1) = \frac{1}{3}}$. De même, $\boxed{P(X_2^3) = \frac{1}{3}}$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(X_2^2) = P(R_1 \cap X_2^2) + P(B_1 \cap X_2^2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.

Donc $\boxed{P(X_2^2) = \frac{1}{3}}$.

On pouvait aussi remarquer que X_2^1, X_2^2 et X_2^3 forment un système complet d'événements.

De manière similaire, $\boxed{P(X_3^1) = \frac{1}{4},\ P(X_3^2) = \frac{1}{4},\ P(X_3^3) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X_3^4) = \frac{1}{4}}$.

(c) Le but de cette question est de démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition

$$\mathcal{H}_n \ : \ \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(X_n^k) = \frac{1}{n+1}.$$

i. À chaque tirage, on rajoute 1 boule dans l'urne. En effet, après n tirages, le nombre de boules est $n+2$ dont au moins une blanche. Le nombre de boules rouges est donc compris entre 1 et $n+1$ donc $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n+1} X_n^k$. De plus, si $k_1 \neq k_2$, $X_n^{k_1} \cap X_n^{k_2} = \emptyset$ car il ne peut pas y avoir à la fois k_1 et k_2 boules rouges. Donc $\boxed{(X_n^k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \text{ est un système complet d'événements}}$.

ii. D'après la formule des probabilités totales, $P(X_{n+1}^k) = \sum_{j=1}^{n+1} P(X_n^j) P_{X_n^j}(X_{n+1}^k)$.

Or $P_{X_n^j}(X_{n+1}^k) = 0$ sauf si $j = k$ ou $j = k-1$. Après le $(n+1)$-ième tirage, on a autant de boules rouges ou une de plus qu'après le n-ième tirage.
Donc $P(X_{n+1}^k) = P(X_n^{k-1})P_{X_n^{k-1}}(X_{n+1}^k) + P(X_n^k)P_{X_n^k}(X_{n+1}^k)$.

iii. Or X_n^k indique qu'il y a k boules rouges et $n+2-k$ boules blanches dans l'urne pour le tirage suivant. Même chose avec X_n^{k-1}. D'où les probabilités suivantes :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & R_{n+1}\ (X_{n+1}^k) \\
X_n^{k-1} \arrow[ur, "\frac{k-1}{n+2}"] \arrow[dr, "\frac{n+3-k}{n+2}"'] & \\
 & B_{n+1}\ (X_{n+1}^{k-1})
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & R_{n+1}\ (X_{n+1}^{k+1}) \\
X_n^{k} \arrow[ur, "\frac{k}{n+2}"] \arrow[dr, "\frac{n+2-k}{n+2}"'] & \\
 & B_{n+1}\ (X_{n+1}^{k})
\end{tikzcd}$$

D'où $P(X_{n+1}^k) = P(X_n^{k-1})\dfrac{k-1}{n+2} + P(X_n^k)\dfrac{n+2-k}{n+2}$.
En supposant $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, cela donne

$$P(X_{n+1}^k) = \frac{1}{n+1}\frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1}\frac{n+2-k}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \boxed{\frac{1}{n+2}}.$$

Ceci montre l'hérédité de la proposition, qui se trouve ainsi démontrée par récurrence.

(d) Toujours à l'aide du même système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, $P(R_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(X_n^k)P_{X_n^k}(R_{n+1})$. Or comme précédemment, X_n^k dénote $n+2$ boules dont k rouges dans l'urne, donc $P_{X_n^k}(R_{n+1}) = \dfrac{k}{n+2}$.
Finalement, $P(R_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\frac{k}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k}_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

2. Désormais pour tout le reste du problème, on revient au cas général $r, b, c \in \mathbb{N}^*$.
Le premier tirage est un tirage équiprobable d'une boule dans une urne qui en contient $r+b$. Le sous-ensemble des boules rouges est de cardinal r, donc $P(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$. De même $P(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$.
On procède de même pour le deuxième tirage avec une urne de $r+b+c$ boules dont, en fonction du premier tirage, r sont rouges et $b+c$ sont blanches ou bien b sont blanches et $r+c$ sont rouges. On a ainsi :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & R_2\ (X_2^{r+2c}) \\
 & R_1\ (X_1^{r+c}) \arrow[ur, "\frac{r+c}{r+b+c}"] \arrow[dr, "\frac{b}{r+b+c}"'] & \\
 & & B_2\ (X_2^{r+c}) \\
\bullet \arrow[uur, "\frac{r}{r+b}"] \arrow[ddr, "\frac{b}{r+b}"'] & & \\
 & & R_2\ (X_2^{r+c}) \\
 & B_1\ (X_1^{r}) \arrow[ur, "\frac{r}{r+b+c}"] \arrow[dr, "\frac{b+c}{r+b+c}"'] & \\
 & & B_2\ (X_2^{r})
\end{tikzcd}$$

D'après la formule des probabilités totales, $P(R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) + P(B_1)P_{B_1}(R_2)$.
Ainsi $P(R_2) = \dfrac{r}{r+b} \times \dfrac{r+c}{r+b+c} + \dfrac{b}{r+b} \times \dfrac{r}{r+b+c} = \dfrac{r(r+c)+br}{(r+b)(r+b+c)}$.
D'après la formule de Bayes, $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1)P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{r(r+c)}{r(r+c)+br} = \boxed{\dfrac{r+c}{r+b+c}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $p_n(r,b)$ la probabilité d'obtenir une boule rouge au n-ième tirage (r et b représentent toujours les nombres de boules rouges et blanches au début de l'expérience).

   (a) D'après la formule des probabilités totales, $p_n(r,b) = P(R_1)P_{R_1}(R_n) + P(B_1)P_{B_1}(R_n)$.
   Or, après avoir tiré une boule blanche, on a une urne composée de $r+b+c$ boules dont r rouges. Donc tirer une boule rouge au n-ième tirage sachant que la première boule était blanche revient à tirer une boule rouge au $(n-1)$-ième tirage dans une urne qui aurait eu $b+c$ boules blanches et r rouges au départ. Ainsi $P_{B_1}(R_n) = p_{n-1}(r, b+c)$.
   De même $P_{R_1}(R_n) = p_{n-1}(r+c, b)$.
   Donc $p_n(r,b) = P(R_1)p_{n-1}(r+c,b) + P(B_1)p_{n-1}(r,b+c)$.
   Donc
   $$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ p_n(r,b) = \frac{r}{r+b}p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{n-1}(r,b+c)}.$$

   (b) On procède par récurrence, la formule ayant déjà été démontrée pour $n=1$.
   Soit $n > 1$. Supposons que (pour tous r, b) $P(R_{n-1}) = \dfrac{r}{r+b}$, c'est-à-dire $p_{n-1}(r,b) = \dfrac{r}{r+b}$.
   D'après la question précédente, $P(R_n) = p_n(r,b) = \dfrac{r}{r+b}p_{n-1}(r+c,b) + \dfrac{b}{r+b}p_{n-1}(r,b+c)$.
   D'après l'H.R., $P(R_n) = \dfrac{r}{r+b} \times \dfrac{r+c}{r+c+b} + \dfrac{b}{r+b} \times \dfrac{r}{r+b+c} = \dfrac{r(r+c+b)}{(r+b)(r+b+c)} = \boxed{\dfrac{r}{r+b}}$.
   Ceci achève la récurrence.

   (c) On appelle $p_{m,n}(r,b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m-ième et n-ième tirage (toujours lorsque l'urne contient b boules blanches et r boules rouges au départ).
   Soit $n > m \geqslant 2$. Obtenir des boules rouges aux m-ième et n-ième tirage sachant que le premier tirage était blanc revient à obtenir des boules rouges aux $(m-1)$-ième et $(n-1)$-ième tirage dans une urne qui aurait contenu au départ r boules rouges et $b+c$ boules blanches. Même raisonnement avec un premier tirage rouge.
   Ainsi, $p_{m,n}(r,b) = P(R_1)p_{m-1,n-1}(r+c,b) + P(B_1)p_{m-1,n-1}(r,b+c)$, soit
   $$p_{m,n}(r,b) = \frac{r}{r+b}p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{m-1,n-1}(r,b+c).$$
   On peut maintenant démontrer par récurrence sur m la formule souhaitée.
   L'initialisation découle des calculs précédents :
   $$p_{1,n}(r,b) = P(R_1 \cap R_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_n) = P(R_1)p_{n-1}(r+c,b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.$$
   Soit $m \geqslant 2$ et supposons la formule vraie pour $m-1$ et tout $n > m-1$. Alors dans la formule de récurrence ci-dessus, on obtient
   $$p_{m,n}(r,b) = \frac{r}{r+b}\frac{(r+c)(r+2c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} + \frac{b}{r+b}\frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)},$$
   ce qui termine la récurrence.

(d) Pour $n \geqslant 2$ et $m \in [\![1, n-1]\!]$, $P(R_m \cap B_n) = P(R_m) - P(R_m \cap R_n) = p_m(r,b) - p_{m,n}(r,b)$. Donc
$$P(R_m \cap B_n) = \frac{r+c}{r+b+c} - \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} = \boxed{\frac{(r+c)b}{(r+b)(r+b+c)}}.$$

Cette expérience porte le nom du mathématicien américain György Pólya (oui, il était d'origine hongroise). On lui doit de nombreux travaux sur les probabilités et la théorie des nombres tout au long du XX^e siècle, mais aussi des traités de didactique et de pédagogie. L'expérience de l'urne de Pólya permet de modéliser des comportements boursiers au cours desquels un acheteur qui achète une action provoque par la hausse de son cours un regain d'intérêt (modélisé par l'ajout des c boules identiques à celle tirée).