Chapitre D5

Matrices et applications linéaires

Objectifs

- Représentation matricielle d'une famille de vecteurs.
- Savoir construire ou lire la matrice d'une application linéaire.
- Changements de base et les matrices de passage.
- Comprendre comment deux matrices semblables représentent le même endomorphisme.

Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls et les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. On peut se limiter à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition et théorème D5.1

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ et $x \in F$. On note $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ sa décomposition dans la base $\mathcal{F}$. On appelle **matrice du vecteur** x dans la base $\mathcal{F}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ceci crée un isomorphisme entre F et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition D5.2

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de F. On appelle **matrice de la famille** $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{F}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \overset{v_1}{\downarrow} & & \overset{v_j}{\downarrow} & & \overset{v_p}{\downarrow} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to \cdot f_1 \\ \\ \to \cdot f_i \\ \\ \to \cdot f_n \end{matrix} \end{array}$$

où les a_{ij} sont les composantes des v_j dans la base $\mathcal{F}$.

Proposition D5.3

Avec les notations précédentes, $\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{V})\right) = \mathrm{rg}\left(\mathcal{V}\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}(\mathcal{V})\right)$.

2 Matrice d'une application linéaire

Définition D5.4

Soit

- ➢ E un espace vectoriel de base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$,
- ➢ F un espace vectoriel de base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$,
- ➢ $u \in \mathcal{L}(E, F)$

On appelle **matrice du u relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$** la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & & u(e_j) & & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to \cdot f_1 \\ \\ \to \cdot f_i \\ \\ \to \cdot f_n \end{array} \end{array}$$

où

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

Remarque. Autrement dit,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Notation. Pour un endomorphisme, on note simplement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(u)$$

Théorème D5.5

Soit $\mathcal{E}$ une base de E un espace de dimension p et $\mathcal{F}$ une base de F un espace de dimension n. Alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque. En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})) = p \times n$.

Définition D5.6

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p(\mathbb{K})}$.

(i) On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'application

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A} : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}.$$

(ii) On appelle **noyau de** A le noyau de l'application $\tilde{A}$.

(iii) On appelle **image de** A l'image de l'application $\tilde{A}$.

Remarque. En identifiant vecteurs et matrices colonnes, cela donne aussi une application $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ que l'on dira aussi canoniquement associée à A.

Proposition D5.7

Soit E et F deux espaces vectoriels avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Étant donné $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x).$$

Proposition D5.8

Soit E et F deux espaces vectoriels avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Étant donné $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x))\right) = \mathrm{rg}(u)$.

Proposition D5.9

Soit E, F et G trois espaces vectoriels avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u).$$

Remarque. Avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_E(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_F(u(x))$, on retient la forme

$$Y = AX.$$

Remarque. Tous les résultats précédents peuvent s'interpréter dans le cas particulier où $E = F$ et établissent une correspondance bijective entre matrices carrées et endomorphismes.

Proposition D5.10

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

(i) u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est inversible.

(ii) Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)\right)^{-1}$.

3 Matrice de changement de base

Définition D5.11

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** (ou **matrice de changement de base**) de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E}$ et on note

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}).$$

Proposition D5.12

Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ trois bases de l'espace vectoriel E. Alors on a

(i) $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$;

(ii) $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\operatorname{Id}_E)$;

(iii) $P_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$;

(iv) $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)^{-1} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$.

Proposition D5.13 (Changement de base pour un vecteur)

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E. Étant donné $x \in E$, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{F}}(x) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(x).$$

Proposition D5.14 (Changement de base pour un morphisme)

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de F. Étant donné $u : E \to F$, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

Proposition D5.15 (Changement de base pour un endomorphisme)

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. Étant donné $u : E \to E$, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

Remarque. Avec $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$, $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$, on retient la forme

$$A' = P^{-1}AP \text{ ou } A = PA'P^{-1}.$$

4 Matrices semblables

Définition D5.16

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Ceci définit la relation binaire dite de **similitude** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition D5.17

La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition D5.18

Soit E un ev de dimension n et de base $\mathcal{E}$.

(i) Soit $\mathcal{E}'$ une base de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ sont semblables.

(ii) Réciproquement, si A et B sont deux matrices semblables de taille n, alors il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}'$ une base de E telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$.

Définition D5.19

(i) On dit qu'une matrice carrée est **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

(ii) On dit qu'une matrice carrée est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.

5 Rang d'une matrice

Proposition D5.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) A est inversible,

(ii) $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$,

(iii) $\mathrm{Im}\, A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

(iv) $\mathrm{rg}(A) = n$.

Proposition D5.21

Soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

(i) $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$,

(ii) si $n = p$ et A est inversible, alors $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} B$,

(iii) si $p = q$ et B est inversible, alors $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} A$,

Définition D5.22

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est **équivalente à** B lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

Proposition D5.23

L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition et définition D5.24

La matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang $r \in \mathbb{N}$ si et seulement si elle est équivalente à la matrice J_r définie par blocs par

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$

Proposition D5.25

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\intercal)$.

Définition D5.26

Soit $n, p, m, q \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$. On dit que B est une **matrice extraite** de A lorsqu'il existe deux applications strictement croissantes $\varphi : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$ et $\psi : [\![1, q]\!] \to [\![1, p]\!]$ telles que

$$\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, q]\!],\ b_{i,j} = a_{\varphi(i),\psi(j)}.$$

Théorème D5.27 (Caractérisation du rang par les matrices extraites)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. Le rang de A est le plus grand entier k tel qu'il existe une matrice extraite de A carrée de taille k inversible.

Remarque. En particulier, toutes les matrices extraites de A sont de rang inférieur ou égal à $\mathrm{rg}(A)$.

Méthodes

- Écrire la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée.
- Écrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée.
- Étudier l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Écrire dans une nouvelle base la matrice d'une application linéaire. donnée.