TD D5. Matrices et applications linéaires

Exercice D5.1

Pour chacune des applications suivantes, vérifier que u est linéaire, calculer sa matrice dans les bases canoniques des espaces considérés, calculer son rang et u^{-1} le cas échéant puis à l'aide de la matrice, calculer l'image du vecteur V donné.

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-2y-3z) \end{array}$ et $V = (0,1,-1)$,
2. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP'(X) - P(X) \end{array}$ et $V = X^3 - 3X^2 + X - 1$,
3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$ et $V = X^2 - X + 3$,
4. $u : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & EM \end{array}$ avec $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice D5.2

Déterminer le noyau et l'image de

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (on montrera aussi que $\operatorname{Ker} B$ et $\operatorname{Im} B$ sont supplémentaires),
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice D5.3

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, notée A.

1. Déterminer $F = \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et justifier que $E = F \oplus G$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminer sa matrice P dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit q la projection sur G parallèlement à F. Déterminer $p+q$, pq, qp ainsi que la matrice Q de q dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que $A = 2P + Q$ et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice D5.4

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2)$. On définit l'endomorphisme f par $f(e_1) = e_1 + e_2$ et $f(e_2) = -e_1 + 2e_2$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base e.
2. Soit $v = xe_1 + ye_2$. Calculer dans la base e les composantes x' et y' de $f(v)$.
3. On pose $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$. Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E.
4. Déterminer P_e^{ε} et P_{ε}^{e}.
5. En déduire la matrice B de f dans la base ε.

Exercice D5.5 ✿

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On pose $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = 2X^2 - X$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P(X) = X^2 - X + 2$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$?
3. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Exercice D5.6 ✿✿

Soient E un ev de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice D5.7 ✿

Montrer que les matrices de chacune des listes suivantes sont semblables.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice D5.8 ✿✿

Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente (on note p son indice de nilpotence) et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^4$ canoniquement associé à N.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{K}^4$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(u^i(a))_{1 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre.
3. (a) Montrer que si $p = 4$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que si $p = 3$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Montrer que si $p = 2$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice D5.9 ⚙⚙

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Pour quelles valeurs de λ le noyau de $A - \lambda I_3$ est-il non réduit à $\{0\}$?
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale et écrire les matrices de passage correspondantes.

Exercice D5.10 ⚙⚙

Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\varphi : P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$$

est diagonalisable, *i.e.* qu'il peut être représenté par une matrice diagonale dans une base bien choisie.

Exercice D5.11 ⚙⚙⚙

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_1 : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{array}$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, φ_A est une forme linéaire.
2. Montrer que $A \mapsto \varphi_A$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans son dual $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$