

Problème 1

1. Par exemple $X(X-2)^2 \in E$.
2. $P \in E \Leftrightarrow (X-2)^2 | P$. Or $\deg P \leq 3$.
Donc $P \in E \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, P = (X-2)^2(aX+b) \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, P = aX(X-2)^2 + b(X-2)^2$.
Donc $E = \text{Vect}\{X(X-2)^2, (X-2)^2\}$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Il existe un unique couple (Q, R) tel que $P = (X-2)^2Q + R$ avec $\deg R \leq 1$.
Comme $(X-2)^2 | (X-2)^2Q$, cela revient à dire que P s'écrit de manière unique $A + R$ avec $(X-2)^2 | A$ et $\deg R \leq 1$.
C'est la définition de $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
4. (a) $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
 $\varphi(\lambda P + \mu Q) = ((\lambda P + \mu Q)(2), (\lambda P + \mu Q)'(2)) = (\lambda P(2) + \mu Q(2), \lambda P'(2) + \mu Q'(2))$
 $= \lambda(P(2), P'(2)) + \mu(Q(2), Q'(2))$.
Donc φ est une application linéaire.
- (b) $P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow (P(2), P'(2)) = (0, 0) \Leftrightarrow 2$ est racine double de $P \Leftrightarrow P \in E$. Donc $\text{Ker } \varphi = E$.
- (c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $P = (X-2)^2 + b(X-2) + a$. Alors $P(2) = a$ et $P'(2) = b$.
Ainsi P est un antécédent de (a, b) par φ . Donc $(a, b) \in \text{Im } \varphi$.
L'autre inclusion étant évidente (par définition), $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$.
Remarque. On peut aussi invoquer le théorème du rang : d'après la question 3 (ou d'après la question 2 en justifiant que la famille est libre), $\dim E = 2$ et ainsi $\text{rg}(\varphi) = 2$. Un sev de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 n'est autre que $\mathbb{R}^2$ tout entier.
5. (a) Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $f(P) = aX^3 + cX^2 + bX + d$.
- (b) $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(f(P)) = P$. Autrement dit, $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$. Donc f est bijectif (sa bijection réciproque est f).
Donc f est injectif et surjectif.
6. (a) Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
 $P \in S \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow P = aX^3 + b(X^2 + X) + d$. Donc $S = \text{Vect}\{X^3, X^2 + X, 1\}$.
 $P \in A \Leftrightarrow \begin{cases} a = d = 0 \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow P = b(X^2 - X)$. Donc $A = \text{Vect}\{X^2 - X\}$.
- (b) Avec la notation ci-dessus, $P = \underbrace{aX^3 + \frac{b+c}{2}(X^2 + X) + d}_{\in S} + \underbrace{\frac{b-c}{2}(X^2 - X)}_{\in A}$.
D'où $\mathbb{R}_3[X] = S + A$.
En outre $S \cap A = \{0\}$ car $P \in S \cap A \Rightarrow P = f(P) = -P \Rightarrow P = 0$.
7. (a) Soit $P \in A$. Alors $P = a(X^2 - X)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Donc $P \in F$.
- (b) • Soit $P \in F \cap S$. Alors $P = a(1 + X^3) + bX^2 + cX$ et $f(P) = P$.
D'où $a(1 + X^3) + bX^2 + cX = a(1 + X^3) + cX^2 + bX$. Donc $b = c$.
Ainsi $P \in \text{Vect}\{1 + X^3, X^2 + X\}$.

- Réciproquement si $P \in \text{Vect}\{1 + X^3, X^2 + X\}$, alors $P = a(1 + X^3) + bX + bX^2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Donc $P \in F$.
En outre, $f(P) = a(1 + X^3) + bX + bX^2 = P$ donc $P \in S$.
Donc $\boxed{P \in F \cap S}$.

8. Le polynôme nul vérifie l'équation, montrons que c'est le seul.

Soit P tel que $f(P) = \lambda P$. On décompose (de manière unique) $P = P_1 + P_2$ avec $P_1 \in S$ et $P_2 \in A$.

Alors $f(P) = P_1 - P_2 = \lambda P_1 + \lambda P_2$.

Par unicité de la décomposition sur $S + A$, on a $P_1 = \lambda P_1$ et $P_2 = -\lambda P_2$.

Comme $\lambda \notin \{-1, 0, 1\}$, nécessairement $P_1 = P_2 = 0$, d'où $\boxed{P = 0}$.

9. On peut ajouter les questions suivantes, pour écrire f matriciellement :

Donner la matrice de f dans la base canonique ; déterminer une base de A et une base de S ; les réunir pour en faire une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner la matrice de f dans cette base.

Problème 2

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t - \alpha)^n} = (t - \alpha)^{-n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $F : t \mapsto \frac{1}{-n + 1}(t - \alpha)^{-n+1} = \frac{-1}{(n - 1)(t - \alpha)^{n-1}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n} dt = \left[\frac{-1}{(n - 1)(t - \alpha)^{n-1}} \right]_{-x}^x = \frac{-1}{n - 1} \left(\frac{1}{(x - \alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(-x - \alpha)^{n-1}} \right)$$

Comme $n - 1 > 0$, on en déduit le résultat par opération sur les limites.

$$\boxed{x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n} \text{ admet une limite lorsque } x \text{ tend vers } +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n} = 0.}$$

- (b) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On écrit $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $\alpha \notin \mathbb{R}$, $b \neq 0$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t - \alpha}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{t - \alpha} = \frac{1}{(t - a) - ib} = \frac{t - a + ib}{(t - a)^2 + b^2} = \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} + i \frac{b}{(t - a)^2 + b^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_{-x}^x \frac{dt}{t - \alpha} = \int_{-x}^x \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} dt + i \int_{-x}^x \frac{b}{(t - a)^2 + b^2} dt.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} dt &= \left[\frac{1}{2} \ln((t - a)^2 + b^2) \right]_{-x}^x = \frac{1}{2} (\ln((x - a)^2 + b^2) - \ln((-x - a)^2 + b^2)) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x - a)^2 + b^2}{(-x - a)^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - a)^2 + b^2}{(-x - a)^2 + b^2} = 1$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} dt = 0$.

D'autre part, en effectuant le changement de variable affine $u = \frac{t-a}{b}$, on obtient

$$\int_{-x}^x \frac{b}{(t-a)^2 + b^2} dt = \int_{\frac{-x-a}{b}}^{\frac{x-a}{b}} \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) - \arctan\left(\frac{-x-a}{b}\right).$$

On distingue alors deux cas.

— Si $b > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-a}{b} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-a}{b} = -\infty$, ainsi par opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{b}{(t-a)^2 + b^2} dt = \pi.$$

— Si $b < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-a}{b} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-a}{b} = +\infty$, ainsi par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{b}{(t-a)^2 + b^2} dt = -\pi.$$

On en déduit le résultat, par opération sur les limites.

$$\boxed{x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{t-\alpha} \text{ admet une limite lorsque } x \text{ tend vers } +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dt}{(t-\alpha)^n} = \begin{cases} i\pi & \text{si } \operatorname{Im}(\alpha) > 0 \\ -i\pi & \text{si } \operatorname{Im}(\alpha) < 0 \end{cases} .}$$

2. (a) Comme $\deg R < 0$, la partie entière de R est nulle. Pour tout $\alpha \in \mathcal{P}$, notons ν_α la multiplicité de α en tant que pôle de R . D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, il existe des nombres complexes $(\lambda_{\alpha,j})_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ 1 \leq j \leq \nu_\alpha}}$ tels que :

$$\boxed{R(X) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \sum_{j=1}^{\nu_\alpha} \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(X-\alpha)^j} .}$$

- (b) Comme $\deg R \leq -2$, $\deg(XR(X)) \leq -1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x) = 0$. D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathcal{P}$, et tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-\alpha)^j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j \geq 2. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la question précédente, et par opérations sur les limites, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \lambda_{\alpha,1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}_\alpha(R).$$

Par unicité de la limite,

$$\boxed{\sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}_\alpha(R) = 0 .}$$

- (c) Comme R n'a aucun pôle réel, $t \mapsto R(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a, d'après la question 2b :

$$\int_{-x}^x R(t) dt = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \sum_{j=1}^{\nu_\alpha} \int_{-x}^x \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j} dt.$$

Soient $\alpha \in \mathcal{P}$ et $j \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question 1a, si $j \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j} dt = 0$.
- D'après la question 1b, si $j = 1$ et $\text{Im}(\alpha) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j} dt = i\pi \lambda_{\alpha,j} = i\pi \text{Res}_\alpha(R)$.
- D'après la question 1b, si $j = 1$ et $\text{Im}(\alpha) < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j} dt = -i\pi \lambda_{\alpha,j} = -i\pi \text{Res}_\alpha(R)$.

Par opérations sur les limites, on en déduit déjà que

$$x \mapsto \int_{-x}^x R(t) dt \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tend vers } +\infty$$

De plus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x R(t) dt = i\pi \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ \text{Im}(\alpha) > 0}} \text{Res}_\alpha(R) - \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ \text{Im}(\alpha) < 0}} \text{Res}_\alpha(R) \right).$$

Or, d'après la question précédente, $\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ \text{Im}(\alpha) < 0}} \text{Res}_\alpha(R) = - \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ \text{Im}(\alpha) > 0}} \text{Res}_\alpha(R)$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x R(t) dt = 2i\pi \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^+} \text{Res}_\alpha(R).$$

3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. Posons $R(X) = \frac{X^{2m}}{X^{2n} + 1}$. On a $\deg R = 2(m-n) \leq -2$. De plus, R n'a aucun pôle réel, car $\forall x \in \mathbb{R}, x^{2n} + 1 > 0$. D'après la formule des résidu, I est bien défini et on a

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x R(t) dt = 2i\pi \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^+} \text{Res}_\alpha(R).$$

Déterminons les pôles de R . Remarquons déjà que R est écrit sous forme irréductible car 0 est la seule racine possible du numérateur et 0 n'est pas racine du dénominateur. Les pôles de R sont donc les racines de $X^{2n} + 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z^{2n} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^{2n} = -1$. Les pôles de R sont donc les racines $2n$ -ièmes de -1 . Il y en a $2n$. Donc R n'a que des pôles simples. D'autre part $\xi = \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\right)$ est une racine $2n$ -ième de -1 . Les autres sont les $\xi\omega^k$, avec $\omega = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \xi^2$ et $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. Autrement dit

$$\mathcal{P} = \left\{ \xi^{2k+1} \mid k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}.$$

Déterminons maintenant les pôles de R qui ont une partie imaginaire strictement positive. Soit $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. On a

$$\operatorname{Im}(\xi^{2k+1}) = \operatorname{Im}\left(\exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2n}\right)\right) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

Ainsi

- si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors $0 < \frac{(2k+1)\pi}{2n} < \pi$, donc $\operatorname{Im}(\xi^{2k+1}) > 0$,
- si $k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket$, alors $\pi < \frac{(2k+1)\pi}{2n} < 2\pi$, donc $\operatorname{Im}(\xi^{2k+1}) < 0$.

On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{P}^+ = \left\{ \xi^{2k+1} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}}$$

Calculons maintenant les résidus de ces pôles. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Posons $\alpha_k = \xi^{2k+1}$. On sait que

$$\operatorname{Res}_{\alpha_k}(R) = (R(X)(X - \alpha_k)|_{X=\alpha_k}) = \left(\frac{X^{2m}}{2nX^{2n-1}} \right)_{|X=\alpha_k} = \frac{\alpha_k^{2m}}{2n\alpha_k^{2n-1}}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par α_k , on obtient $\operatorname{Res}_{\alpha_k}(R) = \frac{\alpha_k^{2m+1}}{2n\alpha_k^{2n}}$. Donc, comme $\alpha_k^{2n} = -1$,

$$\operatorname{Res}_{\alpha_k}(R) = \frac{-\alpha_k^{2m+1}}{2n}.$$

On en déduit que

$$I = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}_{\alpha_k}(R) = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{2m+1} = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi^{2k+1})^{2m+1} = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi^{2m+1})^{2k+1}.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(\xi^{2m+1})^2 = \exp\left(\frac{(2m+1)i\pi}{n}\right) \neq 1$ car $0 < 2m+1 < 2n$. Ainsi

$$I = \frac{-i\pi}{n} \times \frac{\xi^{2m+1} - (\xi^{2m+1})^{2n+1}}{1 - \xi^{2(2m+1)}} = \frac{-i\pi}{n} \times \frac{1 - (\xi^{2m+1})^{2n}}{\xi^{-(2m+1)} - \xi^{2m+1}}$$

Or $(\xi^{2m+1})^{2n} = (\xi^{2n})^{2m+1} = (-1)^{2m+1} = -1$ et comme $|\xi| = 1$, $\xi^{-(2m+1)} - \xi^{2m+1} = -2i \operatorname{Im}(\xi^{2m+1}) = -2i \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)$. D'où

$$\boxed{I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{t^{2m}}{t^{2n} + 1} dt = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)}}$$