

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Dans ce problème on va s'intéresser aux compositions successives d'une fonction avec elle-même : on note pour cela $f^{[1]} = f$ et, pour $n \geq 2$, $f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}$. Ainsi, $f^{[2]} = f \circ f$, $f^{[3]} = f \circ f \circ f$, etc. On rappelle que la fonction tangente est de classe \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition, donc sur un voisinage de 0.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{[n]}$ est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0.
2. Quelle hypothèse minimale permet d'affirmer que $\tan^{[n]}$ admet un développement limité (DL) à l'ordre 5 en 0 ? Justifier que ce DL sera de la forme

$$\tan^{[n]}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o(x^5)$$

avec $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$.

3. En utilisant $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, déterminer un DL à l'ordre 5 en 0 de $\tan(x)$. En déduire les valeurs de a_1, b_1, c_1 .
4. Calculer les valeurs de a_2, b_2, c_2 .
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir les expressions de $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n uniquement.
6. Expressions des trois suites :
 - (a) En déterminant la nature de (a_n) , donner une expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (b) En déterminant la nature de (b_n) , donner une expression de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (c) Pour $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)$ puis en déduire l'expression de c_n en fonction de n .
7. Conclusion : donner le DL à l'ordre 5 en 0 de $\tan^{[n]}(x)$.
8. Déterminer la plus petite valeur de $n \geq 1$ pour laquelle la partie principale du DL de $\tan^{[n]}(x)$ en 0 a tous ses coefficients entiers.