Problème 1

Dans ce problème on va s'intéresser aux compositions successives d'une fonction avec elle-même : on note pour cela $f^{[1]} = f$ et, pour $n \geqslant 2$, $f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}$. Ainsi, $f^{[2]} = f \circ f$, $f^{[3]} = f \circ f \circ f$, *etc.* On rappelle que la fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, donc sur un voisinage de 0.

1. Résultat général : Montrons par récurrence que si f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de a, strictement croissante et $f(a) = a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{[n]}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de a.
   L'initialisation est immédiate car $f^{[1]} = f$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de a.
   Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f^[n]$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de a, emphi.e. sur $]a-h, a+h[$ avec $h > 0$. On a aussi f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage V de a.
   De plus comme f est strictement croissante, continue au voisinage de a et vaut $f(a) = a$, il existe un voisinage V' de a tel que $f(V') \subset]a-h, a+h[$.
   Alors par composition, $f^{[n+1]} = f^{[n]} \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $V \cap V'$.
   Ceci achève la récurrence.
2. Il suffit que $\tan^{[n]}$ soit de classe $\mathcal{C}^5$ au voisinage de 0 et pour cela il suffit que tan soit de classe $\mathcal{C}^5$ en 0, avec la même justification que précédemment.
   Remarque. En cours a été utilisée l'hypothèse de la classe $\mathcal{C}^{n+1}$ pour avoir un DL à l'ordre n, mais on a aussi évoqué (sans le démontrer) que la classe $\mathcal{C}^n$ suffit.
   Par ailleurs, comme tan est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{[n]}$ est impaire donc son polynôme de Taylor est impair, d'où la forme donnée.
3. Voir détails en cours. On montre successivement :
   $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$ donc par composition, $\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^5)$;
   et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$ donc par produit $\boxed{\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)}$.
4. Posons $u = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Alors $u^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + x^5 + o(x^6)$ et $u^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o(x^6)$.
   Avec $\tan(u) \underset{u\to 0}{=} u + \dfrac{u^3}{3} + \dfrac{2u^5}{15} + o(u^6)$, par composition, on a
   $$\boxed{\tan^{[2]}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^5}{5} + o(x^6)}.$$
5. Même démarche avec $\tan^{[n]} x = a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o(x^6)$. On pose $u = a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o(x^6)$ et on compose avec
   $$\tan(u) = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + o(u^6).$$
   On a $u^3 = a_n^3 x^3 + 3a_n^2 b_n x^5 + o(x^6)$ et $u^5 = a_n^5 x^5 + o(x^6)$. Ainsi
   $$\tan^{[n+1]}(x) = a_n x + \left(b_n + \frac{a_n^3}{3}\right) x^3 + \left(c_n + a_n^2 b_n + \frac{2a_n^5}{15}\right) x^5 + o(x^6).$$
   Donc $\boxed{a_{n+1} = a_n^3}$, $\boxed{b_{n+1} = b_n + \dfrac{a_n^3}{3}}$ et $\boxed{c_{n+1} = c_n + a_n^2 b_n + \dfrac{2a_n^5}{15}}$.

6. Expressions des trois suites :
   (a) On montre aisément par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1}$.
   (b) Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{3}$ donc (b_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \dfrac{n}{3}}$.
   (c) On peut poser $c_0 = 0$ ($f^{[0]} = \mathrm{Id}$) pour suivre l'indication de l'énoncé ou sommer à partir de $n = 1$. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1} - c_k) &= \sum_{k=1}^{n} -1\frac{n}{3} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{(n-1)n}{6} + \frac{2(n-1)}{15}.\end{aligned}$$

   Par ailleurs, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1} - c_k) = c_n - c_1$.

   Finalement, $\boxed{c_n = \dfrac{(n-1)n}{6} + \dfrac{2n}{15}}$.

7. Conclusion : soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{\tan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{nx^3}{3} + \dfrac{n(5n-1)x^5}{30} + o(x^6)}$.

8. Soit n tel que $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{N}$.
   D'une part $\dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}$, *i.e.* n est un multiple de 3.
   D'autre part $\dfrac{n(5n-1)}{30} \in \mathbb{N}$, *i.e.* $30 \mid n(5n-1)$. Comme $5n - 1$ et 5 sont premiers entre eux, alors d'après Gauß, $5 \mid n$.
   Comme $3 \wedge 5 = 1$, n est nécessairement un multiple de 15 ; en particulier, $n \geqslant 15$.
   Réciproquement $\boxed{n = 15}$ convient car $a_{15} = 1$, $b_{15} = 5$ et $c_{15} = 37$.