

Problème 1

L'échauffement est indépendant de la suite du problème. Simplement, il établit ou rappelle quelques résultats que vous êtes libres d'utiliser par la suite. Dans tout le problème, on identifiera $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on notera donc plutôt en colonnes les éléments de $\mathbb{R}^n$.

A Échauffement

1. Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E . Montrer que

$$v \circ u = 0 \Leftrightarrow \text{Im } u \subset \text{Ker } v.$$

Remarque : ici, 0 désigne naturellement l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. On définit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x - 4y \\ x - 2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On ne demande pas de montrer que cette application est linéaire.

- (a) Déterminer A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.
- (b) Déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire sur $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$?
- (c) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
- (d) Soit $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $f(X)$ et montrer que $(X, f(X))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On la notera $\mathcal{E}$.

- (e) Déterminer la matrice C de f dans cette base et donner une matrice P inversible telle que $AP = PC$.

B Généralités en dimension 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, Id désigne l'application identité de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note usuellement $f^2 = f \circ f$.

3. Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul et qu'il vérifie $f^2 = 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, f(x))$ soit une famille libre de E .
 - (b) Justifier que cette famille $\mathcal{E}$ est alors une base de E .
 - (c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.
4. Dans cette question, on suppose que f vérifie $f^2 = -2\text{Id}$.
 - (a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = \lambda \cdot x$ admet une unique solution (que l'on précisera).
 - (b) Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $\mathcal{E} = (a, f(a))$ est une base de E .
 - (c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.

C Un espace de polynômes

Dans cette partie, on appelle $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré maximum 3, dont on appelle $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique. On définit

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ P &\mapsto (1 + X^2)P'' - 2XP' \end{aligned}$$

5. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- (b) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et calculer son rang.
- (c) Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- (d) On appelle F l'ensemble des polynômes $P \in E$ qui vérifient $f(P) = -2P$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.
- (e) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- (f) Vrai ou faux ? (justifier)
 - i. $\text{Im } f = F$.
 - ii. $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.
6. Le but de cette question est de déterminer les endomorphismes φ de E qui vérifient $\varphi^2 = f$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ solution du problème.
 - (a) Montrer que $f \circ \varphi = \varphi \circ f$.
 - (b) Montrer que $\forall P \in \text{Ker } f, \varphi(P) \in \text{Ker } f$.
 - (c) On note alors $\varphi_0 : \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f$ l'endomorphisme de $\text{Ker } f$ induit par φ .

$$P \mapsto \varphi(P)$$

Montrer que $\varphi_0^2 = 0$. En déduire que soit $\varphi_0 = 0$, soit il existe une base de $\text{Ker } f$ dans laquelle la matrice de φ_0 est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (d) De la même manière, justifier l'existence d'un endomorphisme φ_1 de F défini par

$$\forall P \in F, \varphi_1(P) = \varphi(P).$$

Calculer φ_1^2 . Que la partie B nous permet-elle de conclure ?

- (e) En déduire la forme de la matrice de φ dans une base bien choisie.