DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Soit (E) l'équation différentielle
$$(1-x)^2y' = (2-x)y.$$

1. (a) Sans calculer les solutions de (E), montrer que toute solution de (E) sur $]-\infty,1[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. *Indication : on pourra montrer par récurrence qu'une solution φ est de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (b) Montrer que la solution f de (E) sur $]-\infty,1[$ vérifiant $f(0) = e$ est $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.
   (c) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$\forall x \in\,]-\infty,1[\,,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\exp\left(\frac{1}{1-x}\right).$$
   Donner une expression de $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X.
   (b) En dérivant n fois l'équation (E), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$P_{n+1}(X) = \left((2n+1)X + X^2\right)P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X).$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$.
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
   (b) Donner a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4.
   (c) Préciser le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.
4. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on pose $u_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$ et $S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n de la fonction exponentielle en 0.
   (b) En déduire que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers e.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ en fonction de u_p et u_{p-1}. En déduire que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leur limite.
   (d) Montrer : $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\,,\ S_p(n+1) - 2(n+1)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$.
   (e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_n.

Problème 2

Notations

On considère un entier naturel $n \geq 2$ et on note $\mathcal{B} = (X^j)_{0 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit un polynôme :

$$R_k = X^k(1-X)^{n-k}$$

Tout polynôme P pourra être identifié à la fonction polynomiale qui lui est associée et on pourra noter 0 le polynôme nul, au lieu de $0_{\mathbb{R}[X]}$. On définit l'application

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & & U & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U\left(\frac{k}{n}\right) R_k \end{array}$$

Dans tout le problème, le résultat d'une question peut être admis afin de faire la suite.

A Étude du cas $n = 3$

Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 3$. Ainsi les polynômes définis dans l'énoncé sont

$$R_0 = (1-X)^3,\ R_1 = X(1-X)^2,\ R_2 = X^2(1-X) \text{ et } R_3 = X^3$$

1. Montrer que (R_0, R_1, R_2, R_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Justifier que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

4. Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. (a) Déterminer deux polynômes Q_2 et Q_3 de degrés respectifs 2 et 3 et **de coefficient dominant** 1 tels que :

$$\varphi(Q_2) = \frac{2}{3} Q_2 \text{ et } \varphi(Q_3) = \frac{2}{9} Q_3$$

   On pose également $Q_0 = 1$ et $Q_1 = X$.

   (b) On pose $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$. Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

   (c) Expliciter la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$, on note D cette matrice.

   (d) Déterminer la matrice de passage, notée P, de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Déterminer P^{-1}.

   (e) Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer A^p. On explicitera tous les coefficients.

B Étude du commutant

On se place toujours dans le cas où $n = 3$ et on reprend les notations de la partie précédente.
On note F_A l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire que $AM = MA$.

6. Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Montrer que M commute avec A si et seulement si N commute avec D.
8. On note $F_D = \{N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}),\ DN = ND\}$. On admet que l'on peut démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, comme dans la question 1. Déterminer une base et la dimension de F_D, pour cela on ne s'effrayera pas d'un système de 16 équations à 16 inconnues.
9. On pose :
$$\begin{array}{cccc} \Gamma & : & \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$$
Démontrer que Γ est un automorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
10. En déduire la dimension de F_A.

C Retour au cas général

On rappelle que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

11. (a) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Démontrer que :
$$X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j}$$
(b) En déduire que $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(c) Démontrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
12. (a) Démontrer que :
$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(X) = X \text{ et } \varphi(X^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X$$
(b) En déduire que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ.
On note $\tilde{\varphi}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ correspondant à la restriction de φ à $\mathbb{R}_2[X]$.
(c) On note A_n la matrice de $\tilde{\varphi}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Démontrer que $A_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)I_3 + \dfrac{1}{n}H$ où H est une matrice à préciser.
(d) Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et dont les coefficients diagonaux valent 1 telle que $H = Q\Delta Q^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(e) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n^n$.
Indication : pour étudier la limite d'une suite de matrices, on examine simplement la limite coefficient par coefficient.