

Les résultats devront être **encadrés**.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

1. (a) Soit φ une solution de (E) sur $] -\infty, 1[$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que φ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $] -\infty, 1[$.

Init. Comme φ est solution de (E) , φ est dérivable sur $] -\infty, 1[$. En particulier, φ est continue (i.e. de classe $\mathcal{C}^0$) sur $] -\infty, 1[$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $] -\infty, 1[$. Comme φ est solution de (E) sur $] -\infty, 1[$, φ est dérivable sur $] -\infty, 1[$ et on a $\forall x \in] -\infty, 1[$, $\varphi'(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2} \varphi(x)$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{2-x}{(1-x)^2}$ est une fraction rationnelle définie sur $] -\infty, 1[$, et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$. Ainsi, φ' est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $] -\infty, 1[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $] -\infty, 1[$. Par conséquent, φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $] -\infty, 1[$.

D'après le principe de récurrence, φ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $] -\infty, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }] -\infty, 1[}$$

- (b) (E) est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

Sur $] -\infty, 1[$, on a $(E) \Leftrightarrow y' - a(x)y = 0$ avec $a : x \mapsto \frac{2-x}{(1-x)^2}$.

On a $\forall x \in] -\infty, 1[$, $a(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$.

Ainsi, une primitive de a sur $] -\infty, 1[$ est $A : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \ln(1-x)$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) , sur $] -\infty, 1[$ est $\{x \mapsto \lambda \exp(A(x)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, comme $\exp(A(0)) = e$, on en déduit que $x \mapsto \exp(A(x)) = \frac{1}{1-x} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$ est la solution f recherchée.

$$\boxed{\text{La solution } f \text{ de } (E) \text{ sur }] -\infty, 1[\text{ vérifiant } f(0) = e \text{ est } f : x \mapsto \frac{1}{1-x} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right).}$$

- (c) Soit $g : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Pour obtenir un développement limité de $\exp \circ g$ en 0, on ne peut pas simplement composer les développements limités de $\exp$ et g à l'ordre 3 en 0 ! En effet, on a $g(0) = 1$! En revanche, on peut écrire $\exp(g(x)) = \exp(g(x) - 1 + 1) = e \times \exp(g(x) - 1)$. Ainsi, on a bien $g(0) - 1 = 0$ et on peut alors composer les développements limités. Un développement limité de $x \mapsto g(x) - 1$ à l'ordre 3 en 0 est

$$g(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1-x} - 1 = x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

Par ailleurs, le développement limité de $\exp$ en 0 à l'ordre 3 est $\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. On en déduit le développement limité de $\exp \circ g$ à l'ordre 3 en 0, en écrivant uniquement les termes nécessaires.

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) &= e \times \exp\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 + (x + x^2 + x^3) + \frac{1}{2}x^2(1 + x + x^2)^2 + \frac{1}{6}x^3(1 + x + x^2)^3 + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 + (x + x^2 + x^3) + \frac{1}{2}x^2(1 + 2x) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + \frac{13e}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Enfin, pour obtenir le développement limité de f demandé, il suffit de multiplier par celui de g .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) \times \left(e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + \frac{13e}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + \frac{13e}{6}x^3\right) + \left(ex + ex^2 + \frac{3e}{2}x^3\right) + (ex^2 + ex^3) + ex^3 + o(x^3) \\ f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \boxed{e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + o(x^3)}. \end{aligned}$$

2. (a) Montrons tout d'abord l'unicité. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in]-\infty, 1[, f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{1-x}\right) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) = Q\left(\frac{1}{1-x}\right) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Alors $\forall x \in]-\infty, 1[, P\left(\frac{1}{1-x}\right) = Q\left(\frac{1}{1-x}\right)$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $]0, +\infty[$, on obtient, en posant $z = \frac{1}{1-x}$, pour tout $z \in]0, +\infty[: P(z) = Q(z)$. Or deux polynômes qui coïncident sur une partie infinie sont égaux. Donc $P = Q$. Cela montre l'unicité du polynôme P_n .

On montre ensuite l'existence par récurrence sur n .

Init. Pour $n = 0$, on a $\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = \frac{1}{1-x} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$, le polynôme $P_0(X) = X$ convient alors.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose le résultat vérifié pour n . il existe alors un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in]-\infty, 1[, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$. En dérivant cette égalité, on obtient, pour tout $x \in]-\infty, 1[$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} P'_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{(1-x)^2} P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \left(P'_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $P_{n+1}(X) = X^2 (P'_n + P_n)$, on a

$$\forall x \in]-\infty, 1[, f^{(n+1)}(x) = P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) \exp \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

Ceci achève la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in]-\infty, 1[, f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) \exp \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = X^2 (P'_n + P_n)$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u : x \mapsto (1-x)^2$ et $v : x \mapsto 2-x$. u et v sont des fonctions polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme f est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$, on a $uf' = vf$. La formule de Leibniz appliquée à cette égalité donne alors

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} f^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v^{(k)} f^{(n-k)}.$$

Comme $u^{(k)} = 0$ si $k \geq 3$ et $v^{(k)} = 0$ si $k \geq 2$, on obtient

$$uf^{(n+1)} + nu'f^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2}u''f^{(n-1)} = vf^{(n)} + nv'f^{(n-1)},$$

soit

$$uf^{(n+1)} = (v - nu')f^{(n)} + n \left(v' - \frac{n-1}{2}u'' \right) f^{(n-1)}.$$

Cela nous donne alors, pour tout $x \in]-\infty, 1[$,

$$\begin{aligned} (1-x)^2 P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) \exp \left(\frac{1}{1-x} \right) &= ((2-x) + 2n(1-x)) P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) \exp \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &\quad + n(-1 - (n-1)) P_{n-1} \left(\frac{1}{1-x} \right) \exp \left(\frac{1}{1-x} \right). \end{aligned}$$

En simplifiant par $\exp \left(\frac{1}{1-x} \right)$ qui est non nul, on obtient

$$(1-x)^2 P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) = (1 + (2n+1)(1-x)) P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) - n^2 P_{n-1} \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $]0, +\infty[$, on obtient, en posant $z = \frac{1}{1-x}$, pour tout $z \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} P_{n+1}(z) &= \left(1 + \frac{(2n+1)}{z} \right) P_n(z) - n^2 P_{n-1}(z) \\ P_{n+1}(z) &= (z^2 + (2n+1)z) P_n(z) - n^2 z^2 P_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Enfin, si deux polynômes sont égaux sur un intervalle véritable, ils sont égaux. Donc

$$P_{n+1}(X) = (X^2 + (2n+1)X) P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X).$$

3. (a) On a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = f^{(n)}(0) = P_n(1)e$. En évaluant l'égalité précédente en $X = 1$, puis en multipliant par e , on obtient :

$$P_{n+1}(1) = 2(n+1)P_n(1) - n^2P_{n-1}(1)$$

$$\boxed{a_{n+1} = 2(n+1)a_n - n^2a_{n-1}}.$$

- (b) D'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de f en 0 est

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 + o(x^3).$$

Ainsi, par unicité du développement limité en 0, on obtient directement :

$$\boxed{a_0 = e}, \boxed{a_1 = 2e}, \boxed{a_2 = 7e} \text{ et } \boxed{a_3 = 34e}.$$

D'après la question précédente, pour $n = 3$, on obtient $a_4 = 8a_3 - 9e_2$ d'où le résultat :

$$\boxed{a_4 = 209e}$$

- (c) Encore une fois d'après la formule de Taylor-Young, et d'après la question précédente, on obtient

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + \frac{209e}{24}x^4 + o(x^4)}$$

4. (a) La fonction exponentielle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt}$$

- (b) L'égalité précédente pour $x = 1$ et $n = p$ donne pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$e - u_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 e^t(1-t)^p dt.$$

Or, $\forall t \in [0, 1], 0 \leq 1-t \leq 1$ et $0 \leq e^t \leq e$, donc $\forall t \in [0, 1], 0 \leq e^t(1-t)^p \leq e$. Ainsi par croissance de l'intégrale, on a $0 \leq \int_0^1 e^t(1-t)^p dt \leq e$, ce qui nous donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq e - u_p \leq \frac{e}{p!}.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } (u_p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } e}.$$

- (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $S_p(0) = \sum_{i=0}^p \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = u_p$ et

$$S_p(1) = \sum_{i=0}^p \frac{(1+i)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^p \frac{i+1}{i!} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(i-1)!} + \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = u_{p-1} + u_p.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, S_p(0) = u_p \text{ et } S_p(1) = u_{p-1} + u_p.}$$

On en déduit directement, d'après la question précédente que

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(0) = e = a_0 \text{ et } \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(1) = 2e = a_1.}$$

(d) Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a

$$\begin{aligned} S_p(n+1) - 2(n+1)S_p(n) + n^2S_p(n-1) &= \sum_{i=0}^p \left(\frac{(n+i+1)!}{(i!)^2} - 2(n+1)\frac{(n+i)!}{(i!)^2} + n^2\frac{(n+i-1)!}{(i!)^2} \right) \\ &= \sum_{i=0}^p \left(((n+i+1)(n+i) - 2(n+1)(n+i) + n^2) \frac{(n+i-1)!}{(i!)^2} \right) \\ &= \sum_{i=0}^p \left((i^2 - (n+i)) \frac{(n+i-1)!}{(i!)^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{(n+i-1)!}{((i-1)!)^2} - \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} - \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2} \\ &= S_{p-1}(n) - S_p(n). \end{aligned}$$

(e) On montre le résultat par récurrence d'ordre deux sur $n \in \mathbb{N}$.

Init. Pour $n = 0$ et $n = 1$, le résultat est vérifié d'après la question 4c.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que le résultat est vérifié pour $n-1$ et n . On le démontre alors pour $n+1$. D'après la question précédente, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, S_p(n+1) = 2(n+1)S_p(n) - n^2S_p(n-1) + S_{p-1}(n) - S_p(n).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, les suites $(S_p(n-1))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_p(n))_{p \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a_{n-1} et a_n . On en déduit alors que la suite $(S_p(n+1))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $2(n+1)a_n - n^2a_{n-1} + a_n - a_n = 2(n+1)a_n - n^2a_{n-1} = a_{n+1}$, d'après la question 3a.

Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la suite } (S_p(n))_{p \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } a_n.}$$

Problème 2

A Étude du cas $n = 3$

- Pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on a $R_k = X^k(1-X)^{3-k}$, ainsi $R_k \in \mathbb{R}_3[X]$ puisque $\deg(R_k) = 3$.
• Montrons ensuite que la famille $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$ est libre.

On se donne $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq 3} \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{k=0}^3 \lambda_k R_k = 0$.

On évalue cette égalité en 0 pour obtenir $\lambda_0 = 0$ puis on évalue en 1 pour obtenir $\lambda_3 = 0$.

Il reste $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda_1 X(1-X)^2 + \lambda_2 X^2(1-X) = 0.$$

En examinant le monôme de degré 1 dans cette égalité, on obtient $\lambda_1 = 0$ puis on en déduit que $\lambda_2 = 0$.

• Finalement la famille $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$ est libre et comme c'est une famille de cardinal $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. • L'application φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ car pour tout $U \in \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(U)$ est une combinaison linéaire des polynômes $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$ qui forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Montrons ensuite la linéarité de φ . Soit $(U, V) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda U + \mu V) &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (\lambda U + \mu V) \left(\frac{k}{3}\right) R_k \\ &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left(\lambda U \left(\frac{k}{3}\right) + \mu V \left(\frac{k}{3}\right) \right) R_k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} U \left(\frac{k}{3}\right) R_k + \mu \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} V \left(\frac{k}{3}\right) R_k \\ &= \lambda \varphi(U) + \mu \varphi(V) \end{aligned}$$

Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. On calcule les images par φ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. En utilisant la formule du binôme,

$$\varphi(1) = R_0 + 3R_1 + 3R_2 + R_3 = (1 - X)^3 + 3X(1 - X)^2 + 3X^2(1 - X) + X^3 = (X + (1 - X))^3 = 1,$$

$$\varphi(X) = R_1 + 2R_2 + R_3 = X(1 - X)^2 + 2X^2(1 - X) + X^3 = X^3 - 2X^2 + X + 2X^2 - 2X^3 + X^3 = X,$$

$$\varphi(X^2) = \frac{1}{3}R_1 + \frac{4}{3}R_2 + R_3 = \frac{1}{3}X(1 - X)^2 + \frac{4}{3}X^2(1 - X) + X^3 = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}X^2,$$

$$\varphi(X^3) = \frac{1}{9}R_1 + \frac{8}{9}R_2 + R_3 = \frac{1}{9}X(1 - X)^2 + \frac{8}{9}X^2(1 - X) + X^3 = \frac{1}{9}X + \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{9}X^3.$$

En disposant les résultats trouvés en colonnes, on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice A est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, on en déduit que A est inversible et donc que φ est bijective. Donc φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

5. (a) • On cherche un polynôme $Q_2 = X^2 + aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel $\varphi(Q_2) = \frac{2}{3}Q_2$. Matriciellement, cela se traduit par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système

$$\begin{cases} b &= \frac{2}{3}b \\ a + \frac{1}{3} &= \frac{2}{3}a \end{cases}$$

On obtient $b = 0$ et $a = -1$, c'est-à-dire $Q_2 = X^2 - X$.

• On procède de même en cherchant Q_3 sous la forme $Q_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On souhaite $\varphi(Q_3) = \frac{2}{9}Q_3$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système

$$\begin{cases} c &= \frac{2}{9}c \\ b + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9} &= \frac{2}{9}b \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} &= \frac{2}{9}a \end{cases}$$

On obtient $c = 0$, $b = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$. Finalement,

$$Q_2 = X^2 - X \text{ et } Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

(b) La famille (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ car elle est composée de polynômes non nuls de degrés distincts. Son cardinal étant égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est une base.

Donc (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) D'après les questions précédentes, on a

$$\varphi(Q_0) = Q_0, \varphi(Q_1) = Q_1, \varphi(Q_2) = \frac{2}{3}Q_2 \text{ et } \varphi(Q_3) = \frac{2}{9}Q_3$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On vient de diagonaliser la matrice A , c'est-à-dire de trouver une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme φ est diagonale.

(d) Pour former la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on place en colonnes les composantes des polynômes de la base $\mathcal{C}$ décomposés dans la base $\mathcal{B}$. D'après les expressions de Q_2 et Q_3 obtenues à la question 5a,

$$P_B^C = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme toute matrice de passage, P est inversible et P^{-1} peut-être obtenue par exemple en résolvant un système.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & y_1 \\ x_2 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = & y_2 \\ x_3 - \frac{3}{2}x_4 & = & y_3 \\ x_4 & = & y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & y_1 \\ x_2 & = & y_2 + y_3 + y_4 \\ x_3 & = & y_3 + \frac{3}{2}y_4 \\ x_4 & = & y_4 \end{cases}$$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- (e) D'après la formule de changement de base, on sait que : $A = PDP^{-1}$. On en déduit, grâce à la simplification $P^{-1}P = I_4$ que

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = PD^pP^{-1}$$

Or la matrice D étant diagonale, ses puissances sont (éventuellement par récurrence)

$$\forall p \in \mathbb{N}, D^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2/3)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2/9)^p \end{pmatrix}$$

Il reste à effectuer les deux multiplications, pour obtenir

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p & 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^p + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^p \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^p & \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^p - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^p \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{9}\right)^p \end{pmatrix}.$$

B Étude du commutant

6. • $F_A \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
 • La matrice nulle de taille 4 commute avec A .
 • Soit $(M, M') \in F_A^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda M + \mu M')A = \lambda(MA) + \mu(M'A) = \lambda AM + \mu AM' = A(\lambda M + \mu M').$$

Ainsi $\lambda M + \mu M' \in F_A$. Finalement

F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

7. D'après la partie A, on sait que $A = PDP^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} AM = MA &\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}MP = P^{-1}MPDP^{-1}P \\ &\Leftrightarrow DN = ND. \end{aligned}$$

M commute avec A si et seulement si N commute avec D

8. On se donne une matrice

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

On a

$$\begin{aligned} N \in F_D &\Leftrightarrow ND = DN \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 2c/3 & 2d/9 \\ e & f & 2g/3 & 2h/9 \\ i & j & 2k/3 & 2l/9 \\ m & n & 2o/3 & 2p/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 2i/3 & 2j/3 & 2k/3 & 2l/3 \\ 2m/9 & 2n/9 & 2o/9 & 2p/9 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow c = d = g = h = i = j = l = m = n = o = 0 \\ &\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow N \in \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44}). \end{aligned}$$

Donc $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$ est une base de F_D qui est de dimension 6.

9. • Montrons tout d'abord que Γ est linéaire. Soit $(M, M') \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\Gamma(\lambda M + \mu M') = P^{-1}(\lambda M + \mu M')P = \lambda P^{-1}MP + \mu P^{-1}M'P = \lambda \Gamma(M) + \mu \Gamma(M').$$

• Montrons ensuite l'injectivité de Γ .

$$M \in \text{Ker}(\Gamma) \Leftrightarrow P^{-1}MP = 0 \Leftrightarrow M = P0P^{-1} = 0.$$

• Finalement, Γ est un endomorphisme injectif en dimension finie donc c'est une bijection. Autrement dit, Γ est un automorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

10. Montrons que $\Gamma(F_A) = F_D$. Ainsi les sous-espaces vectoriels F_A et F_D auront la même dimension puisqu'ils seront isomorphes.

Déjà, d'après la question 7, on sait que si $M \in F_A$ alors $\Gamma(M) \in F_D$, ce qui montre que $\Gamma(F_A) \subset F_D$. Réciproquement, soit $N \in F_D$. On a $N = P^{-1}(PNP^{-1})P$ avec $PNP^{-1} \in F_A$ en utilisant encore la question 7. Ainsi $M = PNP^{-1}$ vérifie $N = \Gamma(M)$ donc $N \in \Gamma(F_A)$, ce qui montre que $F_D \subset \Gamma(F_A)$.

On a bien $\Gamma(F_A) = F_D$, on en déduit que $\boxed{\dim(F_A) = 6}$.

C Retour au cas général

11. (a) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j} &= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^{k+j} (1-X)^{n-k-j} \\ &= X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^k (1-X)^{n-j-k} \\ &= X^j (X + (1-X))^{n-j} = X^j. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j}}$.

- (b) D'après la question précédente, on sait que la famille $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ engendre la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\boxed{(R_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

- (c) En procédant de la même façon que dans la question 2 de la partie A, on montre que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminons son noyau. Soit $U \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\varphi(U) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U\left(\frac{k}{n}\right) R_k = 0.$$

Or d'après la question précédente, $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi l'égalité précédente implique

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, U\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Ainsi le polynôme U possède au moins $n+1$ racines. Mais il est de degré au plus n , donc $U = 0$. On a montré que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, donc φ est injective. Enfin, φ est un endomorphisme injectif en dimension finie, donc φ est bijectif.

Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

12. (a) • Soit $n \geq 2$. D'après la formule du binôme,

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

• Puis

$$\varphi(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\binom{n}{k} \frac{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k}{n} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

On reprend le calcul précédent, on utilise toujours la formule du binôme de Newton et on effectue lors du calcul le changement d'indice $j = k - 1$.

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= X \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} \\ &= X(X + (1-X))^{n-1} = X. \end{aligned}$$

• Enfin :

$$\begin{aligned} \varphi(X^2) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k(k-1) + k) X^k (1-X)^{n-k}. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$,

$$\binom{n}{k} k(k-1) = \frac{n!}{k!(n-k)!} k(k-1) = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi(X^2) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) X^k (1-X)^{n-k} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-2-(k-2)} + \frac{n}{n^2} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^{k-2} (1-X)^{n-2-(k-2)} + \frac{n}{n^2} X \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} X^j (1-X)^{n-2-j} + \frac{n}{n^2} X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 (X + (1-X))^{n-2} + \frac{1}{n} X (X + (1-X))^{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 + \frac{1}{n} X. \end{aligned}$$

Finalement, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X$.

- (b) D'après la question précédente, l'image par φ de chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Donc par linéarité de φ , $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ .

- (c) D'après les égalités trouvées dans la question 12a, en disposant en colonnes les images de 1, X et X^2 par $\tilde{\varphi}$, on a

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/n \\ 0 & 0 & 1 - 1/n \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient la décomposition souhaitée en posant $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (d) Dans cette question, on reconnaît la formule de changement de base. Notons h l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à la matrice H . On a $h(1) = 1$, $h(X) = X$ et $h(X^2) = X$. Ainsi, $h(X^2 - X) = 0$.

La famille $(1, X, X^2 - X)$ est libre (car échelonnée en degrés) et possède 3 vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Dans cette base, on a

$$h(1) = 1, \quad h(X) = X \quad \text{et} \quad h(X^2 - X) = 0$$

La matrice de l'endomorphisme h dans cette nouvelle base est

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose Q la matrice de passage de $(1, X, X^2)$ vers $(1, X, X^2 - X)$, *i.e.*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son inverse est la matrice de passage de $(1, X, X^2 - X)$ à $(1, X, X^2)$, ce qui donne

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puisque $X^2 = (X^2 - X) + X$. On a bien $\Delta = Q^{-1}HQ$ et donc

$$H = Q\Delta Q^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) On reprend la relation de la question 12c.

$$\begin{aligned}
A_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)QI_3Q^{-1} + \frac{1}{n}Q\Delta Q^{-1} \\
&= Q\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}\Delta\right)Q^{-1} \\
&= Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/n \end{pmatrix}Q^{-1}.
\end{aligned}$$

On élève à la puissance n en constatant comme d'habitude la simplification des Q^{-1} et Q :

$$A_n^n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 1/n)^n \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

En effectuant les deux multiplications, on trouve :

$$A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - (1 - 1/n)^n \\ 0 & 1 & (1 - 1/n)^n \end{pmatrix}.$$

Or

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

et

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -1.$$

Par continuité de $x \mapsto e^x$ en -1 , on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{-1}.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 1 & e^{-1} \end{pmatrix}}.$$