

TD B8. Séries numériques

Exercice B8.1 ⚙

Donner la nature de chacune des séries de termes généraux

1. pour ces premiers exemples, on cherchera aussi à calculer la somme en cas de convergence

$$(a) \frac{1}{3^n}, \quad (c) \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right), \quad (d) \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln \left(n^{\ln(n+1)} \right)},$$

$$(b) \frac{2}{n^2 - 1},$$

$$2. \quad (e) \frac{1}{n^2 + 1}, \quad (j) (-1)^n / n^2, \quad (o) n \sin(1/n),$$

$$(f) \frac{2^n n!}{n^n}, \quad (k) \begin{cases} 1/n^2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (p) \frac{\sin(1/n)}{n},$$

$$(g) \ln \left(\frac{2n+1}{n} \right), \quad (l) \frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2}, \quad (q) (-1)^n n^2,$$

$$(h) \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}, \quad (m) \frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)}, \quad (r) \begin{cases} 1/\ln(n) & \text{si } n \text{ pair,} \\ 1/\ln(1/n) & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$(i) \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}, \quad (n) \frac{3}{\sqrt{n} - 1}, \quad (s) \ln(n)/n,$$

$$(t) \frac{1}{n \sin(n^2)};$$

3. ⚙⚙ le cas échéant, on discutera suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(u) \left(\frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \right)^n, \quad (w) \left(\frac{\ln(n)}{n} - 1 \right)^n, \quad (y) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \alpha \sin(1/n),$$

$$(v) \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}), \quad (x) \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad (z) \int_0^{\pi/n} \frac{\sin(t) dt}{1 + t^2}.$$

Exercice B8.2 ⚙

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Que dire de la nature des séries de termes généraux

$$1. e^{u_n} - 1, \quad 2. u_n^2, \quad 3. \ln(1 + u_n).$$

Exercice B8.3 ⚙

- Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge et donner un équivalent de sa somme partielle.
- Montrer que $\sum \frac{1}{n^2 + 1}$ converge et donner un équivalent de son reste à l'ordre n .

Exercice B8.4 ⚙⚙

Déterminer, en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$, la nature et, en cas de convergence, la somme de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}).$$

**Exercice B8.5** ⚙

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge si $\ell > 1$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge si $0 \leq \ell < 1$.
3. Donner deux exemples de séries pour lesquelles $\ell = 1$ et qui ont des natures différentes.

Exercice B8.6 ⚙⚙ *Un produit infini*

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k^2 + x}{k^2 + y}$. Montrer que (P_n) converge vers une limite strictement positive.

Exercice B8.7 ⚙⚙ *Transformation d'Abel*

Soit $(a_n)_n$ une suite de termes positifs décroissante et tendant vers 0. Soit (S_n) une suite bornée.

1. Montrer que $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
2. En déduire que $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
3. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ la convergence de $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$.

Exercice B8.8 ⚙⚙ *Série géométrique dérivée*

Soit $x \in [0, 1[$. Étant donné $p \in \mathbb{N}$, on considère la série $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$.

1. Montrer que cette série converge, on note S_p sa somme.
2. Montrer que $x(S_p + S_{p+1}) = S_{p+1}$.
3. Exprimer S_p en fonction de p et x .
4. En déduire $\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$.
5. Que se passe-t-il si l'on remplace l'hypothèse $x \in [0, 1[$ par $x \in]-1, 1[$?

Exercice B8.9 ⚙⚙⚙ *(Théorème de réarrangement de Riemann)*

1. Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection et $\sum u_n$ une série absolument convergente. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et que sa somme est celle de $\sum u_n$.
2. Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente (*i.e.* convergente mais non absolument convergente). Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers α .