Problème 1

L'échauffement est indépendant de la suite du problème. Simplement, il établit ou rappelle quelques résultats que vous êtes libres d'utiliser par la suite.

A Échauffement

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $v \circ u = 0$.
   Soit $y \in \operatorname{Im} u$.
   On dispose de $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
   $v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = 0$. Donc $y \in \operatorname{Ker} v$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.
   Soit $x \in E$ et calculons $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.
   $u(x) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} v$.
   Donc $v(u(x)) = 0$.

2. On définit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x-4y \\ x-2y \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$.

   (b) $A^2 = 0$ donc $\boxed{f \circ f = 0}$. Ainsi $\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f}$.

   (c) D'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.
   Or $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\dim(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f)$. Comme $\dim(\operatorname{Ker} f) < 2$ (f n'est pas l'application nulle), on a nécessairement $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ et même $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

   Il suffit de donner un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$, par exemple $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$ qui constitue à la fois une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.

   (d) Soit $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $f(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On montre (le faire !) que $(X, f(X))$ est libre. Comme c'est une famille de deux éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^2$. On la notera $\mathcal{E}$.

   (e) On a $f(X) = 0 \cdot X + 1 \cdot f(X)$ et $f(f(X)) = 0 = 0 \cdot X + 0 \cdot f(X)$. Donc $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

   Avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ (matrice de la famille $(X, f(X))$), on a $AP = PC$.

B Généralités en dimension 2

3. (a) Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, il existe x tel que $f(x) \neq 0$.
   Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $ax + bf(x) = 0$.

Alors par linéarité de f, on a $af(x)+bf^2(x)=f(0)=0$, qui donne $af(x)=0$ et donc $a=0$. En remplaçant, on a $bf(x)=0$ et donc $b=0$.
Finalement, $\boxed{(x,f(x)) \text{ est libre}}$.

(b) C'est une famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est donc une base de E.

(c) La matrice de f dans la base $\mathcal{E}$ est, comme en 2e, $\boxed{C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}$.

4. Dans cette question, on suppose que f vérifie $f^2=-2\,\mathrm{Id}$.

(a) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall x\in E$, $f(x)=\lambda x$ implique $f^2(x)=\lambda f(x)=\lambda^2 x$. Or $f^2=-2\,\mathrm{Id}$, d'où $-2x=\lambda^2 x$. Si $x\neq 0$, cela implique $\lambda^2=-2$, ce qui est impossible. Ainsi, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=\lambda\cdot x$ admet pour seule solution $\boxed{x=0}$.

(b) Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda a+\mu f(a)=0$.
Alors par linéarité de f, on a $\lambda f(a)+\mu f^2(a)=f(0)=0$, qui donne $\lambda f(a)-2\mu a=0$. En multipliant la première équation par λ, la seconde par μ, la différence donne $(\lambda^2+2\mu^2)f(a)=0$. Ainsi $\lambda^2+2\mu^2=0$, et donc $\lambda=\mu=0$.
Donc $\boxed{\mathcal{E}=(a,f(a)) \text{ est libre et donc une base de } E}$.

(c) $f(a)=0a+1f(a)$ et $f(f(a))=-2a+0f(a)$. Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$ est $\boxed{\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}}$.

C Un espace de polynômes

Dans cette partie, on appelle $E=\mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré maximum 3, dont on appelle $\mathcal{B}=(1,X,X^2,X^3)$ la base canonique. On définit

$$\begin{array}{rcl} f: E & \to & E \\ P & \mapsto & (1+X^2)P''-2XP' \end{array}$$

5. (a) Soit $P,Q\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P+\mu Q) &= (1+X^2)(\lambda P+\mu Q)''-2X(\lambda P+\mu Q)' \\ &= (1+X^2)(\lambda P''+\mu Q'')-2X(\lambda P'+\mu Q') \\ &= \lambda((1+X^2)P''-2XP')+\mu((1+X^2)Q''-2XQ') \\ &= \lambda f(P)+\mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$.

(b) $f(1)=0$, $f(X)=-2X$, $f(X^2)=2(1+X^2)-4X^2=-2X^2-2$ et $f(X^3)=6X(1+X^2)-6X^3=6X$.
Donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&-2&0\\0&-2&0&6\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}$. Cette matrice est de rang $\boxed{2}$.

(c) Une base de $\mathrm{Im}\,f$ comportera deux vecteurs, par exemple $f(X)$ et $f(X^2)$ (dont on vérifie facilement la liberté), soit $\boxed{(-2X,-2X^2-2)}$.

(d) On a $f(P) = -2P \Leftrightarrow (f + 2\,\mathrm{Id})(P) = 0$. Ainsi $F = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$ et en cela c'est un sev de E. On résout ou on constate que $f(X) = -2X$ et $f(X^2 + 1) = -2(X^2 + 1)$.

Ainsi $\boxed{(X,X^2 + 1) \text{ est une base de } F}$.

(e) Soit $(1,X^3 + 3X)$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$ (qui est bien de dimension 2 par théorème du rang). Comme elle est constituée de polynôme de degrés échelonnés, la famille $\boxed{(1, X^3 + 3X, X, X^2 + 1)}$ est une base de E dans laquelle, par construction, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(f) Vrai ou faux ? (justifier)

i. Vrai (d'après la matrice).

ii. Vrai : la concaténation des deux bases de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}\, f$ forme une base de E.

6. Le but de cette question est de déterminer les endomorphismes φ de E qui vérifient $\varphi^2 = f$.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ solution du problème.

(a) $f \circ \varphi = f^3 = \varphi \circ f$.

(b) Soit $P \in \mathrm{Ker}\, f$. Alors $f(\varphi(P)) = \varphi(f(P)) = \varphi(0) = 0$. Donc $\boxed{\varphi(P) \in \mathrm{Ker}\, f}$.

(c) On définit $\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & \mathrm{Ker}\, f & \to & \mathrm{Ker}\, f \\ & P & \mapsto & \varphi(P) \end{array}$ .qui est un endomorphisme de $\mathrm{Ker}\, f$.

$\forall P \in Kerf$, $\varphi_0^2(P) = \varphi^2(P) = f(P) = 0$. Donc $\boxed{\varphi_0^2 = 0}$.

D'après la question 3, soit $\varphi_0 = 0$ (qui convient), soit il existe une base de $\mathrm{Ker}\, f$ dans laquelle la matrice de φ_0 est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) De la même manière, comme $\forall P \in F, \varphi(P) \in F$, on peut définir $\varphi_1 : F \to F$ tel que $\varphi_1 : P \mapsto \varphi(P)$. Dans ce cas, $\forall P \in F, \varphi_1^2(P) = f(P) = -2P$, soit $\varphi_1^2 = -2\,\mathrm{Id}$. La partie B nous donne alors l'existence d'une base de F telle que la matrice de φ_1 dans cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) En concaténant les deux bases (de $\mathrm{Ker}\, f$ et F) précédemment obtenues, on a la matrice de φ dans cette base : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ (suivant que φ_0 est choisi non nul ou nul).