Problème 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

On dit que « (a_n) vérifie la propriété (P) » si on a à la fois $\begin{cases} a_1 \geqslant 1, \\ \text{la suite } (a_n) \text{ est bornée,} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0, \\ \text{la série } \displaystyle\sum_{n>0} a_n \text{ diverge.} \end{cases}$

On note alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}.$$

Dans tout l'énoncé, on pourra utiliser sans démonstration la propriété (1) suivante : étant données (u_n) et (v_n) deux suites réelles **à termes strictement positifs**,

$$\textbf{si} \quad \begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \textbf{et} \\ \displaystyle\sum_{n>0} u_n \text{ diverge} \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k. \tag{1}$$

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   En utilisant les séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (1), montrer que
   $$H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

2. (a) De façon analogue, montrer que
   $$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

   (b) En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

   (c) Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété (1).

3. Étude de deux exemples.

   (a) On pose dans cette question $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$. Montrer que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$.

   (b) On pose dans cette question $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$ (on pourra utiliser la propriété (1) et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} w_n$).

4. Retour au cas général : on considère (a_n) une suite quelconque qui vérifie la propriété (P).

   (a) Montrer que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

(b) Montrer que

$$\frac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right).$$

(c) Déterminer alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{a_n}{A_n}$.

(d) À l'aide de la propriété (1) et des questions précédentes, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$.

5. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\sum u_n$ diverge.

   Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que $\begin{cases} v_n = \underset{n\to\infty}{o}(u_n), \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ diverge.} \end{cases}$

6. Soit (a_n) une suite vérifiant la propriété (P). Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est-elle convergente ? divergente ?