TD C6. Groupe symétrique

Exercice C6.1 ✿

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Combien y a-t-il de permutations circulaires dans S_n ?

Exercice C6.2 ✿

1. Soit $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire $\rho\sigma$ et ρ^{-1} comme produits de cycles à supports disjoints.
2. Écrire la permutation $(12)(2465)(137)(254)(3561)(25)(146)$ comme produit de cycles à supports disjoints.
3. Calculer la signature de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $(134)(2431)(23)$.

Exercice C6.3 ✿

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 1 & 2 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints, en produit de transpositions, calculer σ^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et donner l'ordre de σ.

Exercice C6.4 ✿

Soit $\gamma \in S_n$ un cycle et $\sigma \in S_n$. Déterminer $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$.

Exercice C6.5 ✿✿

Montrer que S_n est engendré par

1. les transpositions de la forme $\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$ pour $i \in [\![2, n]\!]$,
2. Les transpositions de la forme $\begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$,
3. le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ et la transposition $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice C6.6 ✿✿✿

Quel est le nombre minimal de transpositions engendrant S_n ?

Exercice C6.7 ✿✿

Soit $n \geqslant 2$. Quels cycles sont éléments du groupe alterné A_n ? Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.

Exercice C6.8 ✿✿

Soit $(G, \times)$ un groupe. Pour tout $g \in G$, on définit $\varphi_G : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & gh \end{array}$.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, $\varphi_g \in S_G$.
2. Montrer que $g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de groupes injectif.
3. Montrer le théorème de Cayley : si G est fini de cardinal n, alors il est isomorphe à un sous groupe de S_n.