Problème 1

1. Pour tout $n \geqslant 1$, soit $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

   On sait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ car $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

   De plus, la série $\sum\limits_{n>0} u_n$ diverge. Donc, par la propriété (1), on a

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\ln(n)}.$$

2. (a) Pour tout $n > 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$.

   On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ car $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)}$. De plus, la série $\sum\limits_{n>0} u_n$ diverge. Donc, par la propriété (1), on a

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) = \ln(\ln(n+1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\ln(\ln(n))}.$$

   (b) Ses sommes partielles $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ et $\ln(\ln(n))$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

   Donc la série $\boxed{\sum\limits_{n>1} w_n \text{ diverge}}$.

   (c) On peut utiliser le critère de comparaison avec une intégrale :

$$\int_2^X \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty.$$

   Donc $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n>0} w_n \text{ diverge}}$.

3. (a) La suite (a_n) vérifie la propriété (P) car $a_1 = 1 \geq 1$, la suite est bornée, $a_n > 0$ pour tout n, et la série $\sum\limits_{n>0} a_n$ diverge (grossièrement).

   On a $A_n = n$ et $b_n = \dfrac{1}{\ln(n)}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1}$.

   (b) La suite (a_n) vérifie la propriété (P) car $a_1 = 1 \geq 1$, la suite est bornée, $a_n > 0$ pour tout n, et la série $\sum\limits_{n>0} a_n$ diverge (série harmonique).

   On a $A_n = H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

   Donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ et $b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \to 0$.

   Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0}$.

4. (a) On a $A_n = A_{n-1} + a_n$. Comme la suite (a_n) est bornée et $A_n \to +\infty$, $a_n \underset{n\to\infty}{=} o(A_n)$.
   Donc $\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}}$.

   (b) $\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) = \ln\left(1 + \left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A_n}{A_{n-1}} - 1$ car cette quantité tend vers 0.
   Donc $\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1}} = \boxed{\dfrac{a_n}{A_n}}$.

   (c) Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) = \ln(A_n) \to +\infty$. Donc $\displaystyle\sum \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)$ diverge. Puis par comparaison de séries à termes positifs (la suite (A_n) est croissante car les a_k sont positifs), $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{a_n}{A_n} \text{ diverge}}$.

   (d) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(A_n))$ et $b_n = \displaystyle\frac{1}{\ln(A_n)}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln(A_n))}{\ln(A_n)} \to 0$. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0}$.

5. On considère les sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Si (u_n) est bornée, $\boxed{v_n = \dfrac{u_n}{S_n}}$ convient d'après la question 4c.

   Si (u_n) n'est pas bornée, elle a une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tendant vers $+\infty$. Il suffit de poser, pour tout $n > 0$,
$$v_n = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists k \in \mathbb{N},\ n = \varphi(k) \\ \dfrac{u_n}{n} \text{ sinon.} \end{cases}$$
   Ainsi $v_n = on(u_n)$ mais $\sum v_n$ est grossièrement divergente (à cause de la suite extraite constante égale à 1).

6. (a_n) est bornée donc $a_n x^n = O(x^n)$. Pour $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ converge (absolument) par comparaison avec une série géométrique.
   Si $|x| = 1$, $\boxed{\sum a_n x^n \text{ diverge}}$ car $\sum a_n$ diverge. Si $|x| > 1$, $\boxed{\sum a_n x^n \text{ diverge grossièrement}}$ (sinon $a_n \underset{n\to\infty}{=} o(x^{-n})$ et alors on aurait $\sum a_n$ converge.