DEVOIR MAISON N° 21

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit G un groupe multiplicatif. Pour tout $g \in G$, on notera $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, appelé sous-groupe engendré par g.

On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants, vus en cours ou en exercice :

- Soit G un groupe fini. Le cardinal d'un sous-groupe de G divise $\mathrm{Card}(G)$.
- Le produit de deux transpositions (différentes) est soit un 3-cycle (si leurs supports ne sont pas disjoints), soit un produit de deux 3-cycles (si leurs supports sont disjoints).
- Pour tout n, $\mathrm{Card}(A_n) = \dfrac{n!}{2}$.

A Relation de conjugaison

Soit $n \geqslant 2$. On dit que deux permutations h_1 et h_2 de S_n sont **conjuguées** lorsque

$$\exists \sigma \in S_n, \quad h_2 = \sigma h_1 \sigma^{-1}.$$

1. Montrer que cette relation définit une relation d'équivalence sur S_n.
2. Un sous-groupe H de S_n est dit **distingué** lorsqu'il est stable par conjugaison, *i.e.*

$$\forall h \in H, \forall \sigma \in S_n, \quad \sigma h \sigma^{-1} \in H.$$

   (a) Montrer que $\langle (12) \rangle$ n'est pas un sous-groupe distingué de S_3.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, A_n est un sous-groupe distingué de S_n.

B Étude de A_5

3. Montrer que toute permutation de A_5 différente de l'identité est
   — soit un 3-cycle,
   — soit un 5-cycle,
   — soit un produit de deux transpositions à supports disjoints (on appellera cela par la suite une **double transposition**).
4. Dénombrer les 3-cycles, les 5-cycles et les doubles transpositions de A_5.
5. Dans cette question, on considère $n \geqslant 5$.
   (a) Soit $n \geqslant 5$ et $2 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que deux p-cycles sont conjugués dans S_n.

(b) En déduire que dans A_5

   i. tous les 3-cycles sont conjugués,

   ii. toutes les doubles transpositions sont conjuguées.

   On admet qu'il en va de même pour les 5-cycles ; c'est un peu plus long ou alors utilise la théorie des groupes de Sylow.

6. Soit H un sous-groupe **distingué** de A_5, *i.e.* tel que

$$\forall h \in H, \forall \sigma \in A_5, \quad \sigma h \sigma^{-1} \in H.$$

Montrer que $H = \{\mathrm{id}\}$ ou $H = A_5$.

Remarque. Ce résultat signifie que A_5 ne possède pas de sous-groupe distingué non trivial. On dit que A_5 est un groupe **simple** et c'est un des ingrédients à partir desquels Évariste Galois a démontré qu'une équation polynomiale de degré 5 n'est pas résoluble par radicaux (*i.e.* qu'on ne peut pas exprimer ses solutions avec des formules faisant intervenir des racines, comme c'est le cas avec les équations de degré 2 (merci le discriminant), 3 (coucou les formules de Cardan) ou 4). Galois (au début du XIXᵉ siècle et tout cela avant sa mort prématurée à 21 ans) a également généralisé ce résultat à tout degré $n \geqslant 5$ (cela utilise que les 3-cycles engendrent A_n).