Corrigé du problème d'algèbre.

Partie A : Application φ_A

1) Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\varphi_A(M+N) &= A(M+N)-(M+N)A\\ &= AM+AN-(MA+NA)\\ &= AM+AN-MA-NA\\ &= AM-MA+AN-NA\\ &= \varphi_A(M)+\varphi_A(N)\end{aligned}$$

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda M) &= A(\lambda M)-(\lambda M)A\\ &= \lambda AM-\lambda MA\\ &= \lambda(AM-MA)\\ &= \lambda\varphi_A(M)\end{aligned}$$

Ceci montre que φ_A est linéaire.

L'application φ_A est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: c'est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) On a $\varphi_A(I_n)=0_n$ donc $\varphi_A(I_n)=\varphi_A(0_n)$ ce qui montre que φ_A n'est pas injective.

L'application φ_A n'est pas injective.

3) 1ère rédaction

L'application φ_A étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on a : φ_A est injective si et seulement si φ_A est surjective (théorème de caractérisation des isomorphismes).

D'après la question précédente, φ_A n'est pas injective donc φ_A n'est pas surjective.

2ème rédaction

L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, on a d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))+\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A))=\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))\ .$$

D'après la question précédente, φ_A n'est pas injective donc $\mathrm{Ker}(\varphi_A)\neq\{0_n\}$ et $\dim\mathrm{Ker}(\varphi_A)>0$.

On déduit $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A))<\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ d'où $\mathrm{Im}(\varphi_A)\neq\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc φ_A n'est pas surjective.

3ème rédaction

Par l'absurde, si φ_A est surjective, en particulier il existe $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $I_n=AM-MA$.

On a alors

$$\mathrm{tr}(I_n)=\mathrm{tr}(AM-MA)=\mathrm{tr}(AM)-\mathrm{tr}(MA)=0\ .$$

Contradiction et résultat.

φ_A n'est pas surjective.

Partie B : Exemple

4) a. On considère une matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On écrit

$$M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$$

avec x, y, z, t dcs récls.

On a

$$AM=\begin{pmatrix}x+z & y+t\\ 2z & 2t\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad MA=\begin{pmatrix}x & x+2y\\ z & z+2t\end{pmatrix}$$

donc

$$\varphi_A(M)=\begin{pmatrix}z & -x-y+t\\ z & -z\end{pmatrix}$$

et

$$\varphi_A(M)=0_2\iff\begin{cases}-x-y+t=0\\ z=0\end{cases}$$

$M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(\varphi_A)\iff x+y=t$ et $z=0$

b. On a

$$\begin{cases}x+y-t=0\\ z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-y+t\\ z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-\alpha+\beta\\ y=\alpha\\ z=0\\ t=\beta\end{cases}\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

donc

$$\mathrm{Ker}(\varphi_A)=\left\{\begin{pmatrix}-\alpha+\beta & \alpha\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

On pose $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi_A)=\mathrm{Vect}(I_2,B)$: la famille de vecteurs (I_2,B) est génératrice dans $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$, on a

$$\alpha I_2+\beta B=0_2\iff\begin{pmatrix}\alpha-\beta & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\iff\alpha=0\text{ et }\beta=0$$

donc la famille de vecteurs (I_2,B) est libre.

La famille de vecteurs (I_2,B) est libre et génératrice dans $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

On déduit que c'est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

La famille de vecteurs (I_2,B) est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

$\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ admet une base composée de deux vecteurs donc c'est un espace vectoriel de dimension 2.

$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))=2$

5) a. L'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, on a d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))+\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A))=\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))\ .$$

On a $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))=4$ et d'après la question précédente, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))=2$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi_A))=2$.

$\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi_A))=2$

b. <u>1ère rédaction</u>

On a

$$\varphi_A\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\varphi_A\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$, on a

$$\alpha\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=0_2\iff\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\\beta&-\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff\alpha=0\text{ et }\beta=0$$

donc la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

C'est une famille libre de deux vecteurs dans $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$ qui est un espace vectoriel de dimension 2 : c'est donc une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$.

La famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$

<u>2ème rédaction</u>

La famille de vecteurs $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(\varphi_A)&=\mathrm{Vect}(\varphi_A(E_{11}),\varphi_A(E_{12}),\varphi_A(E_{21}),\varphi_A(E_{22}))\\&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\\&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice dans $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$.

Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$, on a

$$\alpha\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=0_2\iff\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\\beta&-\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff\alpha=0\text{ et }\beta=0$$

donc la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

La famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est libre et génératrice dans $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$ donc c'est une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$.

<u>3ème rédaction</u>

D'après la question 4a, si $M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi_A(M)=\begin{pmatrix}z&-x-y+t\\z&-z\end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(\varphi_A)&=\left\{\begin{pmatrix}z&-x-y+t\\z&-z\end{pmatrix}\right\}_{x,y,z,t\in\mathbb{R}}\\&=\left\{x\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}_{x,y,z,t\in\mathbb{R}}\\&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\\&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est génératricc dans $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$.

Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$, on a

$$\alpha\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=0_2\iff\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\\beta&-\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff\alpha=0\text{ et }\beta=0$$

donc la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

La famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est libre et génératrice dans $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$ donc c'est une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi_A)$.

6) On a

$$\varphi_A(E_{11})=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}=-E_{12}$$

$$\varphi_A(E_{12})=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}=-E_{12}$$

$$\varphi_A(E_{21})=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=E_{11}+E_{21}-E_{22}$$

$$\varphi_A(E_{22})=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=E_{12}$$

La matrice de φ_A dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est donc

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\-1&-1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Partie C : Lemme de Schur

7) a. On suppose que u est une homothétie de E.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda.x$ pour tout $x \in E$.

Si $x \in E$, on a $\lambda.x + (-1).u(x) = 0_E$ donc la famille de vecteurs $(x, u(x))$ est liée.

Si u est une homothétie, alors pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

b. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

On commence par montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda.x$.

Si $x = 0_E$, c'est évident. On suppose donc $x \neq 0_E$. La famille $(x, u(x))$ est liée donc il existe α et β des réels non tous les deux nuls tels que $\alpha.x + \beta.u(x) = 0_E$. Si $\beta = 0$, on a $\alpha.x = 0_E$ et comme $x \neq 0_E$ ceci entraînerait $\alpha = 0$ ce qui est impossible puisque les réels α et β ne sont pas tous les deux nuls. On a donc $\beta \neq 0$ et en posant $\lambda = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, on obtient $u(x) = \lambda.x$.

Pour montrer que u est une homothétie, il reste à voir que ce coefficient λ est le même pour tous les vecteurs non nuls x de E.

1ère rédaction

On considère $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe un réel λ_k tel que $u(e_k) = \lambda_k.e_k$.

Montrons maintenant que tous les réels λ_k sont égaux (à λ_1).

Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Il existe un réel γ_k tel que $u(e_1 + e_k) = \gamma_k.(e_1 + e_k) = \gamma_k.e_1 + \gamma_k.e_k$.

D'autre part, par linéarité de u, on a $u(e_1 + e_k) = u(e_1) + u(e_k) = \lambda_1.e_1 + \lambda_k.e_k$.

On déduit $(\lambda_1 - \gamma_k).e_1 + (\lambda_k - \gamma_k).e_k = 0_E$ et comme la famille de vecteurs (e_1, e_k) est libre ceci entraîne $\lambda_1 = \gamma_k$ et $\lambda_k = \gamma_k$ d'où $\lambda_k = \lambda_1$.

Ainsi, en posant $\lambda = \lambda_1$, on obtient $u(e_k) = \lambda.e_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

L'application linéaire u correspond avec l'homothétie de rapport λ sur une base de E : ces deux applications linéaires sont donc égales.

2ème rédaction

On considère deux vecteurs x et y non nuls de E.

D'après ce qui précède, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha.x$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u(y) = \beta.y$.

Si la famille (x, y) est liée, il existe (puisque $x \neq 0_E$) un réel λ tel que $y = \lambda.x$.

On a $u(y) = \beta.(\lambda.x) = (\beta\lambda).x = (\lambda\beta).x$.

L'application u étant linéaire, on a $u(y) = \lambda.u(x) = (\lambda\alpha).x$.

Le vecteur x n'étant pas nul, on déduit $\lambda\alpha = \lambda\beta$. Comme $y \neq 0_E$, on a $\lambda \neq 0$ et on déduit $\alpha = \beta$.

Si la famille (x, y) est libre, on considère le vecteur $x + y$.

Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u(x + y) = \gamma.(x + y)$.

On a donc $u(x + y) = \gamma.x + \gamma.y$.

L'application u étant linéaire, $u(x + y) = u(x) + u(y) = \alpha.x + \beta.y$.

On a donc $(\alpha - \gamma).x + (\beta - \gamma).y = 0_E$ et comme la famille de vecteurs (x, y) est libre ceci entraîne $\alpha = \gamma$ et $\beta = \gamma$ d'où $\alpha = \beta$.

Ainsi, le même réel λ convient pour tous les vecteurs x de E.

On a donc $u(x) = \lambda.x$ pour tout $x \in E$, ce qui montre que u est une homothétie.

On obtient avec a et b le lemme de Schur : u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

Partie D : Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

8) 1ère rédaction

On a

$$Z_n = \bigcap_{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Ker}(\varphi_M)$$

donc Z_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est une intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Z_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

2ème rédaction

La matrice nulle 0_n appartient à Z_n.

Soient A et B dans Z_n. Montrons que $A + B$ appartient à Z_n.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$(A + B)M = AM + BM = MA + MB = M(A + B)\ .$$

Ainsi, $(A + B)M = M(A + B)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc $A + B \in Z_n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in Z_n$. Montrons que λA appartient à Z_n.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$(\lambda A)M = \lambda(AM) = \lambda(MA) = M(\lambda A)\ .$$

Ainsi, $(\lambda A)M = M(\lambda A)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\lambda A \in Z_n$.

9) a. Si $A \in Z_2$, on a $AM = MA$ pour toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc en particulier on a $AE_{ij} = E_{ij}A$ pour tous i, j dans $[\![1, 2]\!]$.

Réciproquement, supposons $AE_{ij} = E_{ij}A$ pour tous i, j dans $[\![1, 2]\!]$.

On a donc $\varphi_A(E_{ij}) = 0_2$ pour tous i, j dans $[\![1, 2]\!]$.

L'application φ_A étant linéaire et la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ étant une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on déduit $\varphi_A = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))}$ c'est-à-dire $AM = MA$ pour tout M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$A \in Z_2 \iff \forall (i, j) \in [\![1, 2]\!]^2\ ,\ AE_{ij} = E_{ij}A$

b. Analyse

Soit $A \in Z_2$.

On écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d des réels et on utilise le fait que A commute avec les quatre matrices de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

L'égalité $AE_{11} = E_{11}A$ s'écrit $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où on déduit $b = c = 0$. L'égalité $AE_{12} = E_{12}A$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où on déduit $a = d$, ce qui montre $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Synthèse

Si A s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $A = \lambda I_2$ et il est clair que $A \in Z_2$.

Conclusion

Z_2 est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

10) a. Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.
Vect(x) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie donc il existe un supplémentaire F de Vect(x) dans $\mathbb{R}^n$.

b. On note p la projection sur F parallèlement à Vect(x).
L'application p étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on a d'après l'hypothèse sur u, $u \circ p = p \circ u$.
En particulier $[u \circ p](x) = [p \circ u](x)$ c'est-à-dire $u(p(x)) = p(u(x))$.
On a $p(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $u(p(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
On déduit $p(u(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$, ce qui montre $u(x) \in$ Vect(x).
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda.x$ et on déduit que la famille $(x, u(x))$ est liée.

c. Analyse
Soit $A \in Z_n$.
On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
L'égalité $AM = MA$ valable pour tout matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se traduit géométriquement par $u \circ v = v \circ u$ pour tout endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$.
D'après b, si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
On déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
D'après la question 7b, ceci entraîne que u est une homothétie.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda.x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
La matrice A représente u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ donc on a

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $A = \lambda I_n$.

Synthèse
Réciproquement, si $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $A \in Z_n$.

Conclusion

$$\boxed{Z_n = \text{Vect}(I_n)}$$

Partie E : Matrices diagonales
11) On considère une matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On écrit

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

avec x, y, z, t des réels.
On a

$$AM = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \beta z & \beta t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} \alpha x & \beta y \\ \alpha z & \beta t \end{pmatrix}$$

donc

$$\varphi_A(M) = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha - \beta)y \\ (\beta - \alpha)z & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\varphi_A(M) = 0_2 \iff \begin{cases} (\alpha - \beta)y = 0 \\ (\beta - \alpha)z = 0 \end{cases}$$

On a $\alpha - \beta \neq 0$ donc $\varphi_A(M) = 0_2 \iff y = 0$ et $z = 0$.

$$\boxed{M \in \text{Ker}(\varphi_A) \text{ si et seulement si } M \text{ est diagonale}}$$

b. D'après ce qui précède, on a

$$\text{Ker}(\varphi_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\}_{x,t \in \mathbb{R}} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{x,t \in \mathbb{R}} = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}) \ .$$

Ainsi, la famille de vecteurs (E_{11}, E_{22}) est génératrice dans Ker(φ_A).
De plus c'est une famille libre (elle est extraite de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$), donc on déduit que c'est une base de Ker(φ_A) et on a $\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = 2$.

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = 2}$$

L'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, on a d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) + \dim(\text{Im}(\varphi_A)) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) \ .$$

On a $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ et $\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = 2$ donc $\dim(\text{Im}\,(\varphi_A)) = 2$.

$$\boxed{\dim(\text{Im}\,(\varphi_A)) = 2}$$

c. Soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Si $B \in \text{Im}(\varphi_A)$, il existe $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $B = \varphi_A(M)$.
En écrivant

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

avec x, y, z, t des réels, on a d'après les calculs de 11a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha - \beta)y \\ (\beta - \alpha)z & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que les coefficients diagonaux de B sont nuls.

Réciproquement, on suppose que la matrice B a ses coefficients diagonaux nuls.
On a donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

avec a et b des réels et d'après les calculs de 11a, on a $B = \varphi_A(M)$ où

$$M = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$\boxed{B \in \text{Im}(\varphi_A) \text{ si et seulement si ses coefficients diagonaux sont nuls.}}$$

12) On a

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & \\ & & \alpha & & & \\ & & & \beta & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \beta \end{pmatrix}.$$

a. Les ensembles E_α et E_β sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ car ce sont des noyaux d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

b. Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = \alpha.x \quad &\iff \quad (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots \alpha x_p, \beta x_{p+1}. \beta x_{p+2}, \dots \beta x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots \alpha x_p, \alpha x_{p+1}, \alpha x_{p+2}, \dots \alpha x_n) \\ &\iff \quad (0, 0, \dots 0, (\beta - \alpha)x_{p+1}, (\beta - \alpha)x_{p+2}, \dots (\beta - \alpha)x_n) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ &\iff \quad x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_n = 0 \end{aligned}$$

donc $E_\alpha = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$.
De même, on obtient $E_\beta = \text{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$.
Les familles de vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ sont libres (extraites de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) donc $\dim(E_\alpha) = p$ et $\dim(E_\beta) = n - p$.

c. <u>1ère rédaction</u>
Soit $x \in E_\alpha \cap E_\beta$.
D'après la sous-question précédente, il existe des réels α_1, α_2, …, α_n tels que

$$x = \alpha_1.e_1 + \alpha_2.e_2 + \dots + \alpha_p.e_p \quad \text{et} \quad x = \alpha_{p+1}.e_{p+1} + \alpha_{p+2}.e_{p+2} + \dots + \alpha_n.e_n \ .$$

On déduit

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, -\alpha_{p+1}, -\alpha_{p+2}, \dots, -\alpha_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

d'où $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, …, $\alpha_p = 0$ donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
On a donc $E_\alpha \cap E_\beta = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
D'après la sous-question précédente, on a $\dim(E_\alpha) + \dim(E_\beta) = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc d'après le théorème de caractérisation des supplémentaires, les sous-espaces vectoriels E_α et E_β sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

<u>2ème rédaction</u>
<u>$E_\alpha \cap E_\beta = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$</u>
Soit $x \in E_\alpha \cap E_\beta$.
On a $[f - \alpha.\text{id}_{\mathbb{R}^n}](x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $[f - \beta.\text{id}_{\mathbb{R}^n}](x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $f(x) = \alpha.x$ et $f(x) = \beta.x$.
On déduit $(\alpha - \beta).x = 0_{\mathbb{R}^n}$ et comme $\alpha - \beta \neq 0$ on a $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

<u>$E_\alpha + E_\beta = \mathbb{R}^n$</u>
Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
On écrit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec x_i des réels et on a $x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \dots + x_n.e_n$ où $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Par lecture en colonnes de la matrice A, on a $f(e_i) = \alpha.e_i$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $f(e_i) = \beta.e_i$ si $p + 1 \leqslant i \leqslant n$.
On pose $y = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \dots + x_p.e_p$ et $z = x_{p+1}.e_{p+1} + x_{p+2}.e_{p+2} + \dots + x_n.e_n$.

On a $x = y + z$.
Les vecteurs e_1, e_2, …, e_p appartiennent à E_α et E_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ donc $y \in E_\alpha$.
Les vecteurs e_{p+1}, e_{p+2}, …, e_n appartiennent à E_β et E_β est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ donc $z \in E_\beta$.

$\boxed{E_\alpha \text{ et } E_\beta \text{ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de } \mathbb{R}^n.}$

d. On suppose $f \circ g = g \circ f$.
Montrons que E_α est stable par g.
Soit $x \in E_\alpha$. On a $f(x) = \alpha.x$ donc $g(f(x)) = g(\alpha.x) = \alpha.g(x)$ par linéarité de g.
On a donc puisque $f \circ g = g \circ f$, $f(g(x)) = \alpha.g(x)$ ce qui montre $g(x) \in E_\alpha$.
Ainsi, E_α est stable par g et on montre de même que E_β est stable par g.

Réciproquement, on suppose que les espaces vectoriels E_α et E_β sont stables par g.
Soit $x \in E$.
D'après a, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in E_\alpha$ et $z \in E_\beta$.
On a $f(x) = f(y) + f(z) = \alpha.y + \beta.z$ donc $g(f(x)) = \alpha.g(y) + \beta.g(z)$ par linéarité de g.
D'autre part, $g(x) = g(y) + g(z)$, et $f(g(x)) = f(g(y)) + f(g(z))$ par linéarité de f.
L'espace E_α étant stable par g, on a $g(y) \in E_\alpha$ donc $f(g(y)) = \alpha.g(y)$.
De même, on a $f(g(z)) = \beta.g(z)$.
Ainsi $f(g(x)) = \alpha.g(y) + \beta.g(z)$ et on a $f(g(x)) = g(f(x))$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $[f \circ g](x) = [g \circ f](x)$ d'où $f \circ g = g \circ f$.

e. *Cette question est délicate à rédiger si on veut suivre l'esprit de l'énoncé (deuxième rédaction). L'idée est la suivante : d'après d, se donner un endomorphisme qui commute avec f revient à se donner un endomorphisme qui laisse stables les espaces E_α et E_β. Puisque E_α et E_β sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, ceci revient à se donner un endomorphisme de E_α et un endomorphisme de E_β. On a donc $p^2 + (n-p)^2$ degrés de liberté.*

<u>1ère rédaction</u>
En raisonnant par blocs et en appliquant la question 11a, on obtient que les matrices M de $\text{Ker}(\varphi_A)$ sont les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

avec $R \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.
L'application

$$\begin{cases} \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{R}) & \to & \text{Ker}(\varphi_A) \\ (R, S) & \mapsto & \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un isomorphisme donc

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = \dim(\mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{R})) = \dim(\mathscr{M}_p(\mathbb{R})) + \dim(\mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{R})) = p^2 + (n-p)^2$$

$\boxed{\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = p^2 + (n-p)^2}$

<u>2ème rédaction</u>
L'isomorphisme canonique entre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ fait correspondre aux matrices M de $\text{Ker}(\varphi_A)$ les endomorphismes g de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Un isomorphisme conservant les dimensions, il s'agit donc d'obtenir la dimension de $C_f = \{g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \ / \ f \circ g = g \circ f\}$.

Si g appartient à C_f, les espaces vectoriels E_α et E_β sont stables par g d'après b, donc on peut considérer les applications $g_1 : E_\alpha \to E_\alpha$ et $g_2 : E_\beta \to E_\beta$ définies par $g_1(y) = g(y)$ et $g_2(z) = g(z)$ (endomorphismes induits).
Ces applications sont des endomorphismes de E_α et E_β respectivement (par linéarité de g) et il est évident que l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} C_f & \to & \mathscr{L}(E_\alpha) \times \mathscr{L}(E_\beta) \\ g & \mapsto & (g_1, g_2) \end{array} \right.$$

est linéaire.
L'application Φ est injective : si $\Phi(g) = (0_{\mathscr{L}(E_\alpha)}, 0_{\mathscr{L}(E_\beta)})$, on a $g(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $y \in E_\alpha$ et $g(z) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $z \in E_\beta$ et on déduit facilement $g = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ puisque $\mathbb{R}^n = E_\alpha + E_\beta$.
Maintenant, si $(u, v) \in \mathscr{L}(E_\alpha) \times \mathscr{L}(E_\beta)$, on définit un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ en posant $g(x) = u(p(x)) + v(q(x))$ où p est la projection sur E_α parallèlement à E_β et q est la projection sur E_β parallèlement à E_α.
L'endomorphisme g ainsi défini appartient à C_f car il laisse stable les espaces E_α et E_β (question 12b) et on a $\Phi(g) = (u, v)$.
Ainsi, l'application Φ est un isomorphisme donc

$$\dim(C_f) = \dim(\mathscr{L}(E_\alpha) \times \mathscr{L}(E_\beta)) = \dim(\mathscr{L}(E_\alpha)) + \dim(\mathscr{L}(E_\beta)) \ .$$

D'après la question 12b, on a $\dim(E_\alpha) = p$ et $\dim(E_\beta) = n - p$ donc $\dim(\mathscr{L}(E_\alpha)) = p^2$ et $\dim(\mathscr{L}(E_\beta)) = (n-p)^2$.

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = p^2 + (n-p)^2}$$

Partie F : Matrices de trace nulle

13) 1ère rédaction
V_n est le noyau de la trace qui est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On déduit que V_n est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2, V_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

$$\boxed{V_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ de dimension } n^2 - 1.}$$

2ème rédaction
L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, on a d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{tr})) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \ .$$

$\mathrm{Im}(\mathrm{tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ contenant 1 ($\mathrm{tr}(E_{11}) = 1$) donc $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{tr})) = 1$.
On a $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = n^2 - 1$.
On a $V_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ donc V_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

14) On considère les matrices

$$A = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad C = E_{11} - E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Montrons que la famille (A, B, C) est libre.
Soient α, β, γ des réels vérifiant $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0_n$.
On a

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on déduit $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.
La famille (A, B, C) est une famille libre de trois vecteurs dans V_2 qui est un espace vectoriel de dimension 3 d'après la question précédente : c'est donc une base de V_2.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } V_2.}$$

15) a. On suppose $u \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.
On raisonne par l'absurde.
On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
D'après la question 7b, l'application linéaire u est une homothétie : il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda.x$ pour tout $x \in E$.
La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donc

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ .$$

L'endomorphisme u étant de trace nulle, on a $\mathrm{tr}(M) = 0$, c'est-à-dire $2\lambda = 0$.
On a donc $\lambda = 0$ donc $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$ ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Si } u \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}, \text{ il existe un vecteur } x \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ tel que la famille } (x, u(x)) \text{ est libre}}$$

b. Si $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$, la matrice de u dans la base canonique est 0_2.
On peut donc supposer $u \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.
D'après a, il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre.
On pose $a_1 = x$ et $a_2 = u(x)$. La famille $\mathscr{B} = (a_1, a_2)$ est une famille libre de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
On a $u(a_1) = a_2$ donc la matrice M' de u dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

avec a et b des réels. L'endomorphisme u étant de trace nulle, on a $\mathrm{tr}(M') = 0$, c'est-à-dire $b = 0$.
Ainsi on a

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice représentative de u dans la base $\mathscr{B}$ a ses deux coefficients diagonaux nuls.

16) On suppose qu'il existe deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = AB - BA$.
On a donc par linéarité de la trace,

$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) \ .$$

On a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donc $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Réciproquement, on suppose $\mathrm{tr}(M) = 0$.
On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à u.
Cet endomorphisme est de trace nulle, donc d'après la question 15b, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle

la matrice M' de u a ses deux coefficients diagonaux nuls.
D'après la question 11c, $M' \in \mathrm{Im}(\varphi_{E_{11}})$; il existe donc une matrice H de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M' = E_{11}H - HE_{11}$.
On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{B}$.
D'après le théorème de changement de base, on a $M = PM'P^{-1}$ donc

$$M = PM'P^{-1} = P(E_{11}H - HE_{11})P^{-1} = (PE_{11}H - PHE_{11})P^{-1} = PE_{11}HP^{-1} - PHE_{11}P^{-1} \ .$$

On a donc

$$M = (PE_{11}P^{-1})(PHP^{-1}) - (PHP^{-1})(PE_{11}P^{-1}) \ .$$

On pose $A = PE_{11}P^{-1}$ et $B = PHP^{-1}$. On a $M = AB - BA$.

17) *Cette question est difficile.*
On commence par généraliser le résultat de la question 15b, en procédant par récurrence sur la dimension de l'espace.
On considère donc la propriété P_n : « Si E est un espace vectoriel de dimension n et si u est un endomorphisme de E de trace nulle, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls. »

Initialisation
Si $n = 1$, dire que u est de trace nulle équivaut à dire que u est nul donc la propriété P_1 est vérifiée.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que la propriété P_n est vérifiée.
On considère E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et u un endomorphisme de E de trace nulle.
Si u est une homothétie, on considère une base quelconque de E et la matrice associée à u est λI_{n+1} avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La trace de u étant nulle, on déduit $\lambda = 0$ et $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$. La matrice de u dans n'importe quelle base de E est donc la matrice nulle et en particulier, tous ses coefficients diagonaux sont nuls.
On suppose maintenant que u n'est pas une homothétie.
D'après le lemme de Schur (question 7b), il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, u(x))$ est libre.
D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(x, u(x))$ en une base $\mathscr{B}$ de E.
Dans cette base, la matrice de u est de la forme

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \dots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & N & \\ \vdots & & & \end{array}\right] \ .$$

La matrice M étant de trace nulle, et le coefficient de place $(1,1)$ étant nul, on déduit que la matrice N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ obtenue en retirant de M la première ligne et la première colonne est de trace nulle.
On note $\mathscr{C}$ la famille de vecteurs obtenue en retirant de $\mathscr{B}$ le vecteur x, et on considère $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{C})$.
Il est facile de montrer que F est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$ dans E.
On note p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)$.
La matrice N est la matrice représentative dans la base $\mathscr{C}$ de $v = p \circ u$ considéré comme un endomorphisme de F.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{C}'$ de F dans laquelle la matrice N' de l'endomorphisme v a tous ses coefficients diagonaux nuls.
En ajoutant x en première position à la famille $\mathscr{C}'$, on obtient une base de E, dans laquelle l'endomorphisme

u a pour matrice représentative une matrice de la forme

$$M' = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \dots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & N' & \\ \times & & & \end{array}\right] \ .$$

La matrice N' ayant tous ses coefficients diagonaux nuls, il en est de même de la matrice M'.

Conclusion
D'après le principe de récurrence, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si E est un espace vectoriel de dimension n et si u est un endomorphisme de E de trace nulle, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

On raisonne maintenant de façon analogue à la question 16 (il suffit de généraliser la question 11c aux matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant tous leurs coefficients diagonaux distincts).

On suppose qu'il existe deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = AB - BA$.
On a donc par linéarité de la trace

$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0 \ .$$

On suppose que la matrice M est de trace nulle.
On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. Cet endomorphisme est de trace nulle, donc d'après ce qui précède, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice M' de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & 0 & \\ & & 3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & n \end{pmatrix}$$

Si $H = (h_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le coefficient de place (i,j) de la matrice $DH - HD$ est égal à $(i-j)h_{ij}$. On considère donc la matrice H définie par $h_{ii} = 0$ et $h_{ij} = \dfrac{1}{i-j} m'_{ij}$ si $i \neq j$ et on obtient $M' = DH - HD$.

De même qu'à la question 16, on pose $A = PDP^{-1}$ et $B = PHP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{B}$.
On obtient

$$\begin{aligned} AB - BA &= PDP^{-1}PHP^{-1} - PHP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PDHP^{-1} - PHDP^{-1} \\ &= P(DH - HD)P^{-1} \\ &= PM'P^{-1} \\ &= M \qquad \text{(théorème de changement de base)} \end{aligned}$$

Ainsi, $M = AB - BA$.

Corrigé du problème d'analyse.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En 0, $x \mapsto \ln(1-x)$ a pour développement limité à l'ordre $n+1$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1} + o\left(x^n\right)}.$$

(b) Tout d'abord, f est continue sur $I \setminus \{0\}$ en tant que quotient et composée de fonctions continues. De plus, d'après la question précédente, on a en particulier $f(x) = 1 + o(1)$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Ainsi, d'après le théorème de prolongement par continuité, f se prolonge en une fonction continue sur I, et on a $f(0) = 1$.

$$\boxed{f \text{ se prolonge en une fonction continue sur } I \text{ et on a } f(0) = 1}.$$

(c) D'après la question 1a, on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{2}}.$$

(d) Une équation de $\mathscr{T}$ est $y = f'(0)x + f(0)$, *i.e.* $\boxed{\mathscr{T} \ : \ y = \frac{x}{2} + 1}$.

D'après la question 1a, on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)$. Ainsi, $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)$ a même signe que $\frac{x^2}{3}$ au voisinage de 0. Donc

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au dessus de } \mathscr{T} \text{ au voisinage de 0}}.$$

2. La fonction $x \mapsto 1 - x$ est affine, donc $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Comme elle est à valeurs dans $]0, +\infty[$ et ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $x \mapsto \ln(1-x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I en tant que composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Enfin, comme $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est une fonction rationnelle, donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \setminus \{0\}$, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \setminus \{0\}}$$

en tant que produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

3. (a) On a montré que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \setminus \{0\}$, donc f est dérivable sur $I \setminus \{0\}$. D'autre part, on a montré que f est dérivable en 0. Donc f est dérivable sur I. De plus, on a :

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x} - f(x)\right).$$

On en déduit

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ xf'(x) = \frac{1}{1-x} - f(x).$$

Enfin, comme $f(0) = 1$, l'égalité est bien vérifiée pour $x = 0$. D'où le résultat.

$$\boxed{\forall x \in I,\ xf'(x) = \frac{1}{1-x} - f(x)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les développements limités suivants à l'ordre 2 en 0.

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right) \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)$$

Ainsi, par différence, $xf'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + o\left(x^{n+1}\right)$. En divisant par x, on obtient

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{2x}{3} + o(x)}.$$

(c) On sait déjà que f est dérivable sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$. De plus, d'après la question précédente, on a $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0. Donc

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I}.$$

(d) D'après la question 3b, on a aussi $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + o(x)$. Ainsi, f' est dérivable en 0, et $f''(0) = \frac{2}{3}$. Donc

$$\boxed{f \text{ est deux fois dérivable en 0 et } f''(0) = \frac{2}{3}}.$$

4. (a) Soit $k : t \mapsto t\ln t - (t-1)$. k est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $\forall t > 0$, $k'(t) = \ln t$. Par conséquent k est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $k(1) = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\forall t > 0,\ t\ln t \geq t - 1}.$$

(b) On a $\forall x \in I$, $1 - x > 0$. Ainsi, d'après la question précédente, $\forall x \in I$, $(1-x)\ln(1-x) \geq -x$, d'où $\forall x \in I$, $(1-x)\ln(1-x) + x \geq 0$. Or d'après la question 3a,

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f'(x) = \frac{(1-x)\ln(1-x) + x}{x^2(1-x)}.$$

Comme $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $x^2(1-x) > 0$, $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $f'(x) \geq 0$. Enfin, comme $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, on en déduit $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$. Donc

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } I}.$$

Calculons les limites de f en $-\infty$ et en 1.

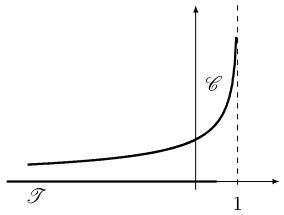
- En $-\infty$. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = 0$. Or on a :

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f(x) = \frac{-(1-x)}{x} \times \frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ par produit de limites.

- En 1. On a $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty}$ par opérations sur les limites.

(c) Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$. De plus, comme f est croissante sur I, $\forall x \in I$, $f(x) \geq 0$. Donc $\mathscr{C}$ est au dessus de son asymptote en $-\infty$.



5. (a) On a déjà montré que h est $\mathcal{C}^\infty$ sur I à la question 2. Montrons par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ h^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

Initialisation. $\forall x \in I$, $h'(x) = \dfrac{1}{1-x}$, donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\forall x \in I$, $h^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$. On a alors

$$\forall x \in I,\ h^{(n+1)}(x) = -(-n)\frac{(n-1)!}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ h^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}}.$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$. On a $0 \leq x < \dfrac{1}{2}$, d'où $\dfrac{1}{2} < 1 - x \leq 1$. On obtient ainsi : $1 \leq \dfrac{1}{(1-x)^n} < 2^n$. D'après la question précédente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[,\ \left|h^{(n)}(x)\right| \leq 2^n(n-1)!}.$$

(c) Remarquons déjà que si $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1} = 1 = f(0)$. Donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1}$ est vérifiée pour $x = 0$. Posons $M_n = 2^n(n-1)!$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|h(x) - \sum_{i=0}^{n+1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!}x^i\right| \leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)!}x^{n+2}.$$

Or $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $h^{(i)}(0) = (i-1)!$, $h(0) = 0$ et $\dfrac{M_{n+2}}{(n+2)!}x^{n+2} \leq \dfrac{2^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!} \times \dfrac{1}{2^{n+2}} = \dfrac{1}{n+2}$. Donc

$$\left|h(x) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x^i}{i}\right| \leq \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi, en divisant par x et en effectuant le changement d'indice $k = i - 1$:

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1}\right| \leq \frac{1}{x(n+2)}.$$

On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[,\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k+1} = f(x)}.$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1a, $f(x) \underset{x\to0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1} + \frac{x^n}{n+1} + o\left(x^n\right)$. Ainsi, par opérations sur les développements limités,

$$\varphi_n(x) \underset{x\to0}{=} \frac{(-1)^n n!}{n+1} + o\left(1\right).$$

D'où

$$\boxed{\lim_{x\to0} \varphi_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{n+1}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. φ_n est dérivable sur $I \setminus \{0\}$ en tant que combinaison linéaire et produit de fonctions dérivables. Soit $x \in I \setminus \{0\}$. On a, d'après la question 3a,

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= (-1)^n n! \left[\frac{-n}{x^{n+1}}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1}\right) + \frac{1}{x^n}\left(f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{kx^{k-1}}{k+1}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1} n!}{x^{n+1}} \left[nf(x) - n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1} - xf'(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{kx^k}{k+1}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1} n!}{x^{n+1}} \left[(n+1)f(x) - n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k+1} - \frac{1}{1-x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{kx^k}{k+1}\right].
\end{aligned}$$

Or, comme $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= \frac{(-1)^{n+1}n!}{x^{n+1}}\left[(n+1)f(x) - n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}x^k - x^n - \frac{x^{n+1}}{1-x} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{kx^k}{k+1}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}n!}{x^{n+1}}\left[(n+1)f(x) - (n+1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k+1} - x^n - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+1}}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k+1} - \frac{x^n}{n+1}\right) + \frac{(-1)^n n!}{1-x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_n'(x) = \varphi_{n+1}(x) + \frac{(-1)^n n!}{1-x}}.$$

7. (a) **Initialisation.** On a montré que

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f'(x) = \frac{-1}{x}f(x) + \frac{1}{x(1-x)}.$$

Or $\forall x \in I \setminus \{0\},\ \varphi_1(x) = \dfrac{-1}{x}\left(f(x) - 1\right)$. On en déduit que

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f'(x) = \varphi_1(x) + \frac{-1}{x} + \frac{1}{x(1-x)} = \varphi_1(x) + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, la propriété est montrée pour $n = 1$ car le polynôme $P_1(X) = 1$ convient.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f^{(n)}(x) = \varphi_n(x) + \frac{P_n(x)}{(1-x)^n}.$$

Soit $x \in I \setminus \{0\}$. En utilisant la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \varphi_{n+1}(x) + \frac{(-1)^n n!}{1-x} + \frac{P_n'(x)(1-x)^n + nP_n(x)(1-x)^{n-1}}{(1-x)^{2n}} \\
&= \varphi_{n+1}(x) + \frac{(-1)^n n!(1-x)^n + P_n'(x)(1-x) + nP_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto (-1)^n n!(1-x)^n + P_n'(x)(1-x) + nP_n(x)$ est une fonction polynomiale, on en déduit que la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in I \setminus \{0\},\ f^{(n)}(x) = \varphi_n(x) + \frac{P_n(x)}{(1-x)^n}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n, Q_n tels que

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f^{(n)}(x) = \varphi_n(x) + \frac{P_n(x)}{(1-x)^n} = \varphi_n(x) + \frac{Q_n(x)}{(1-x)^n}.$$

Alors $\forall x \in I \setminus \{0\},\ \dfrac{P_n(x)}{(1-x)^n} = \dfrac{Q_n(x)}{(1-x)^n}$, *i.e.* $P_n(x) = Q_n(x)$.

P_n et Q_n coïncident sur $I \setminus \{0\}$, soit en une infinité de valeurs réelles. Autrement dit, le polynôme $P_n - Q_n$ possède une infinité de racines et est par conséquent le polynôme nul. Donc $\boxed{P_n = Q_n}$.

(c) L'hérédité de la question 7a donne la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1}(X) = (-1)^n n!(1-X)^n + P_n'(X)(1-X) + nP_n(X)$$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P_n est $n-1$ et son coefficient dominant est $(n-1)!$.

Initialisation. $P_1 = 1$ est de degré 0 et de coefficient dominant $0! = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_n de degré $n-1$ et de coefficient dominant $(n-1)!$.
Alors $\deg(P_n) = \deg((1-X)P_n'(X)) = n-1$, donc le degré de P_{n+1} est n et son coefficient dominant celui de $(-1)^n n!(1-X)^n$, à savoir $(-1)^n n!(-1)^n = n!$.

D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ le degré de } P_n \text{ est } n-1 \text{ et son coefficient dominant est } (n-1)!}.$$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Initialisation. On a déjà montré que f est continue sur I.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Alors $f^{(n)}$ est continue sur I.
De plus, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \setminus \{0\}$, donc en particulier $f^{(n)}$ est dérivable sur $I \setminus \{0\}$.
Dans l'expression de $f^{(n+1)}$ donnée par la question 7a, φ_{n+1} possède une limite finie en 0.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1-x)^{n+1}} = P_{n+1}(0)$. Donc par opérations sur les limites, $f^{(n+1)}$ possède une limite finie en 0.
D'après le théorème de limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $\left(f^{(n)}\right)'(0)$ coïncide avec la limite de $f^{(n+1)}$ en 0, ce qui permet de prolonger $f^{(n+1)}$ en une fonction continue sur I.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

D'après le principe de récurrence, $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I}$.

8. Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I. On a, d'après le théorème de Taylor-Young,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^k\right).$$

Donc, par unicité du développement limité et d'après la question 1a,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n+1}.$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = \frac{n!}{n+1}}.$$