Chapitre E3

Variables aléatoires

Objectifs

- Notion de variable aléatoire.
- Reconnaître les expériences menant à des variables usuelles, calculer et reconnaître leurs lois.
- Exprimer et manipuler des grandeurs telles que l'espérance, la variance, l'écart-type.
- Lois marginales et loi conjointe d'un couple de VAD.
- Indépendance, covariance.
- Inégalités de Markov et Tchbychev.

Dans tout ce qui suit, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini, E et F désignent deux ensembles et n un entier naturel non nul.

1 Variables aléatoires réelles

1.1 Généralités

Définition E3.1

(i) Soit E un ensemble. On appelle **variable aléatoire** (VA) sur Ω toute application $X : \Omega \to E$.

(ii) On appelle **variable aléatoire réelle** (VAR) sur Ω toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Son **ensemble de valeurs** est l'ensemble fini $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$.

Notations.

- Dans Ω, on note $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'événement $X^{-1}(\{\omega\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$.
- Si A est un sous-ensemble de $X(\Omega)$, on note $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$.

Théorème et définition E3.2

Soit X une VA sur Ω. Alors

$$P_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}.$$

est appelée **loi de la variable** X et permet de définir une loi de probabilités sur $X(\Omega)$.

Proposition E3.3

Les événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements.

Remarque. Comme pour une loi de probabilité sur un univers fini, P_X est entièrement déterminée par les $(P_X(\{x\}))_{x \in X(\Omega)}$. C'est ce qu'il suffit de donner quand on demande la loi d'une variable aléatoire.

Définition et théorème E3.4

On dit que deux VA X et Y **ont même loi** ou **sont égales en loi** lorsque l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

(i) $P_X = P_Y$.

(ii) $\forall x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = P(Y = x)$.

On note alors $X \sim Y$.

1.2 Espérance, variance

Définition E3.5

L'**espérance** d'une variable aléatoire réelle X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in E} x P(X = x).$$

Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite **centrée**.

Proposition E3.6

L'espérance d'une VAR X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$.

Proposition E3.7

Soient X et Y deux VAR et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

- linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$,
- positivité : si X est à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
- croissance : si $P(X \leqslant Y) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
- inégalité triangulaire : $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Définition E3.8

La **variance** d'une variable aléatoire X à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ est

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

et son **écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$. Une variable centrée de variance égale à 1 est dite **centrée réduite**.

Proposition E3.9

Avec les notations ci-dessus, on a

(i) $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$,

(ii) $\mathbb{V}(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = \mathbb{E}(X)) = 1$

Proposition E3.10 (Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Proposition E3.11

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Proposition et définition E3.12

Si X est une VAR, $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite. On appelle cette v.a. la **centrée réduite** de X, notée X^*

1.3 Lois usuelles

Définition E3.13

On dit que la variable X suit une **loi certaine** de paramètre $a \in \mathbb{R}$ lorsque $X(\Omega) = \{a\}$ et

$$P(X = a) = 1.$$

Proposition E3.14

Si X suit une loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = 0$.

Définition E3.15

On dit que la variable X à valeurs dans l'ensemble fini E suit une **loi uniforme** lorsque

$$\forall x \in E,\ P(X = x) = \frac{1}{|E|}.$$

On note alors $X \sim \mathscr{U}(E)$.

Proposition E3.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1+n}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Définition E3.17

On dit que la variable X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ lorsque

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p \quad .$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Proposition E3.18

Soit $p \in [0, 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

Définition E3.19

On dit que la variable X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ lorsque
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
On note alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Proposition E3.20

Soit $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

1.4 Inégalités

Théorème E3.21 (Inégalité de Markov)

Soit X une VAR positive. Soit $a > 0$. Alors
$$P(X > a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Dém. E3.21

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x<a}} xP(X=x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} xP(X=x).$$
$$\mathbb{E}(X) \geqslant a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} P(X=x) = aP(X \geqslant a).$$

Théorème E3.22 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une VAR. Soit $\varepsilon > 0$. Alors
$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dém. E3.22

On applique l'inégalité de Markov à la VAR $(X - \mathbb{E}(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$.

1.5 Transfert

Théorème et définition E3.23

Soit $X : \Omega \to E$ une VAR et $f : E \to F$ une application. On appelle **image de X par** f la variable aléatoire $f \circ X : \Omega \to F$, notée $f(X)$.
La loi de $f(X)$ est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ P\left(f(X) \in A\right) = P\left(X \in f^{-1}(A)\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) \in A}} P(X = x).$$

Proposition E3.24

Soit X, Y deux VAR à valeurs dans E et $f : E \to F$ une fonction réelle. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Théorème E3.25 (transfert)

Soit X une VAR et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

2 Couple de variables aléatoires

2.1 Indépendance

Définition E3.26

Deux VA X et Y sont dites **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ lorsque

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y).$$

Définition E3.27

Soit $U \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement non négligeable et X une VA. On appelle **loi conditionnelle de** X **sachant** U la loi de X relativement à l'espace probabilisé (Ω, P_U), autrement dit

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \longmapsto & P_U(X \in A) = P((X \in A)|U) \end{array}$$

Remarque. En particulier si X, Y sont deux VA et $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, on définit la probabilité conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ par

$$\forall x \in X(\Omega),\ P((X = x)|(Y = y)) = P_X(\{x\}|\{Y = y\}) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(Y = y)}.$$

Proposition E3.28

Deux VA X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P_X(\{x\}|\{Y = y\}) = P_X(\{x\})$.

2.2 Lois d'un couple de VA

Théorème et définition E3.29

Soit X et Y deux VA sur Ω à valeurs dans E et F respectivement.

(i) L'application $(X, Y) : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$ est une VA, appelée **couple de variables aléatoires**.

(ii) La **loi du couple** (X, Y) ou **loi conjointe** de X et Y est

$$P_{(X,Y)} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}((X, Y)(\Omega)) & \to & [0, 1] \\ U & \mapsto & P((X, Y) \in U) \end{array}.$$

(iii) Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales** du couple (X, Y).

Notation. On note $P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y))$, parfois aussi $P(X = x, Y = y)$ (on peut lire « probabilité que $X = x$ et $Y = y$ »).

Proposition E3.30

Soit (X, Y) un couple de VA.

- $\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap [Y = y])$.
- $\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P((Y = y) \cap (X = x))$.

Proposition E3.31

Soit (X, Y) un couple de VA et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to E$. Alors $g(X, Y)$ est une VAR.

Exemples. Les cas les plus couramment étudiés sont $X + Y$, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, ou encore XY.

Théorème E3.32 (Transfert)

Si la VA $Z = g(X,Y)$ admet une espérance, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P((X=x)\cap(Y=y)).$$

Remarque. Cette propriété entraîne également la linéarité de l'espérance.

2.3 Covariance

Proposition et définition E3.33

Soit X et Y deux VA indépendantes. La **covariance** de X et Y est définie par

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}(Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

On dit que X et Y sont **décorrélées** lorsque $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

Proposition E3.34

Soit X, Y des VAR.

(i) La covariance est **bilinéaire**, *i.e.* pour X_1, X_2, Y_1, Y_2 des VAR et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\operatorname{Cov}(X_1,Y) + b\operatorname{Cov}(X_2,Y),$$
$$\operatorname{Cov}(X, aY_1 + bY_2) = a\operatorname{Cov}(X,Y_1) + b\operatorname{Cov}(X,Y_2).$$

(ii) La covariance est symétrique, *i.e.* $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X)$.

(iii) $\operatorname{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$ et $\operatorname{Cov}(X,X) = 0$ si et seulement si X suit une loi certaine.

Proposition E3.35

Soit X, Y deux VAR.

(i) $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$.

(ii) $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y)^2$.

(iii) $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Proposition E3.36

Soit X et Y deux VA indépendantes.

(i) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,

(ii) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$,

(iii) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

2.4 n-uplets de variables aléatoires

Définition E3.37

Des VA $X_1, \dots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** lorsque

$$\forall (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega)),\ P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Proposition E3.38

Soit $X_1, \dots, X_n$ des VA. On a équivalence entre

(i) les $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes,

(ii) pour tout $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les $(X_i \in A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants,

(iii) pour tout $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, les $(X_i = x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.

Théorème E3.39

Soit $X_1, \dots, X_n$ des VA mutuellement indépendantes.

(i) Soit $1 \leqslant m \leqslant n$. Les VA $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Soit $f_1, \dots, f_n$ des applications. Les VA $(f_i(X_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes.

(iii) Lemme des coalitions. Soit I et J non vides tels que $[\![1, n]\!] = I \sqcup J$ et F, G deux applications. Alors les VA $F((X_i)_{i \in I})$ et $G((X_j)_{j \in J})$ sont indépendantes.

Théorème E3.40

Soit $p \in [0,1]$, $X_1, \ldots, X_n$ des VA mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Méthodes

- Mettre en relation la loi et la fonction de répartition d'une variable aléatoire finie.
- Établir la loi, l'espérance d'une variable aléatoire de la forme $Y = g(X)$.
- Déterminer la loi d'un couple (X, Y) de V.A.
  - ➢ lorsque X et Y sont connues et indépendantes,
  - ➢ lorsqu'on connaît la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant les événements $(X = x)$.
- Déterminer les lois marginales connaissant la loi d'un couple de V.A.
- Déterminer la loi d'une fonction d'un couple
  - ➢ dans le cas des fonctions min, max avec la fonction de répartition,
  - ➢ dans le cas de la somme par produit de convolution.
- Déterminer l'espérance d'une fonction d'un couple
  - ➢ par calcul direct,
  - ➢ par théorème de transfert.