TD E3. Variables aléatoires

1 Variables aléatoires réelles

Exercice E3.1 ✪

Déterminer la loi de la variable aléatoire X dans chacune des expériences suivantes.

1. Je range au hasard mes 25 paires de chaussettes dans les trois tiroirs de ma commode. X désigne le nombre de paires de chaussettes dans le tiroir du haut.
2. Je possède 10 poules, 10 chats et 10 scarabées. J'organise une loterie et tire au hasard un de mes animaux de compagnie. X désigne le nombre de pattes du vainqueur.
3. En salle des profs, il y a 6 profs de maths, 3 profs d'histoire et 5 profs d'anglais. 10 fois de suite un élève vient déposer un document dans un casier et frappe à la porte. Les profs tirent au sort celui qui va lui ouvrir. X désigne le nombre de fois où un prof d'anglais a été dérangé.
4. J'ai 12 enfants. X désigne le nombre de fils que j'ai.
5. 10% des gens sont gauchers. Je vends des ciseaux pour droitier et des ciseaux pour gaucher. Cette semaine, j'ai eu 100 clients. X désigne le nombre de ciseaux pour gaucher vendus.

Exercice E3.2

On considère le jeu suivant : je joue à pile ou face avec mon petit cousin et lance deux fois de suite une pièce équilibrée. Si j'obtiens deux résultats identiques, je lui donne 3 euros ; sinon il me donne 1 euro si le premier lancer a fait pile, 2 euros si le premier lancer a fait face. Décrire un espace probabilisé modélisant ce jeu et définir une variable aléatoire G désignant le gain de mon petit cousin. Donner la loi de G. Mon petit cousin a-t-il intérêt à me réclamer de jouer plusieurs fois à ce jeu ?

Exercice E3.3

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $3, 4, 5$ et 6. Soit $Y = 4X - 2$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que $P(X = 3) = P(X = 4)$, $P(X < 5) = \dfrac{1}{3}$ et $P(X > 5) = \dfrac{1}{4}$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X et Y.

Exercice E3.4

La v.a. X suit une loi binomiale d'espérance 5 et d'écart-type 2. Calculer $P(X = 6)$.

Exercice E3.5 ✪✪ **(Loi du maximum)**

On dispose d'une urne contenant $n + 1$ boules numérotées de 0 à n. On en tire deux simultanément. X représente le plus grand des deux numéros tirés et Y le plus petit.

1. Calculer la loi de X.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(Y \geqslant k)$.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice E3.6 ✪

On dispose de deux paquets de biscuits qui en contiennent chacun n. On choisit aléatoirement un des deux paquets et on mange un biscuit. Puis on recommence, et ce jusqu'à ce qu'une des deux boîtes soit vide. On appelle X le nombre de biscuits restant dans l'autre paquet. Déterminer la loi de X.

Exercice E3.7 ✲

Étant donné $A \in \mathcal{P}(A)$, on définit la variable aléatoire indicatrice par : $\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Soit A, B, C des événements tels que $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = P(C) = \dfrac{5}{12}$, $P(A \cap B) = P(B \cap C) = \dfrac{1}{3}$, $P(A \cap C) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4}$. On pose $X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$. Donner la loi de X.
2. Vérifier avec l'expérience du lancer de deux dés, X désignant la somme des deux lancers, et les événements $A = [X \in \{4, 6, 7, 9\}]$, $B = [X \in \{2, 3, 4, 6, 9\}]$ et $C = [X \in \{2, 3, 6, 9, 11, 12\}]$.

Exercice E3.8 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = 2^X$

Exercice E3.9 ✲✲

Dans une urne possédant N boules dont B blanches et R rouges,

1. on tire n fois successivement une boule avec remise. On appelle X le nombre de boules blanches. Déterminer la loi de X.
2. on tire simultanément n boules. On appelle X le nombre de boules blanches. Déterminer la loi de X.
3. on tire n fois successivement une boule sans remise. On appelle X le nombre de boules blanches. Déterminer la loi de X.

Exercice E3.10 ✲✲

On dispose de p urnes numérotées de 1 à p, telles que l'urne numéro k contienne k boules noires et $p - k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard, puis on y effectue des tirages avec remise. Calculer la probabilité de l'événement $A_{n,p}$: « on a obtenu n boules noires en $2n$ tirages. » On peut se demander la limite $\lim\limits_{p \to +\infty} P(A_{n,p})$. On renvoie pour cela au chapitre sur l'intégration de Riemann

Exercice E3.11 ✲

On joue 100 fois à PILE ou FACE avec une pièce non truquée. On appelle F la variable aléatoire associée au nombre de fois qu'on a obtenu FACE.

1. Quelle est la loi de F ?
2. Donner son espérance et son écart-type.
3. On considère l'événement A : obtenir un nombre de FACE strictement compris entre 40 et 60. Écrire une expression exacte de la probabilité de l'événement A puis en donner une minoration.

Exercice E3.12 ✲✲

On considère une expérience aléatoire et un événement A tel que $P(A) = p \in [0, 1]$. On répète N fois l'expérience et on note X_N la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que A s'est réalisé. On note $S_N = \dfrac{X_N}{N}$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_N. En déduire l'espérance et la variance de S_N.
2. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_N
3. Pour quelle valeur de N la valeur de S_N a-t-elle plus de 95% de chances d'être une valeur approchée de p à 10^{-2} près ?

2 Familles de variables aléatoires

Exercice E3.13 ⚙

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance un dé équilibré à n faces. Son résultat est représenté par la variable aléatoire X. Si $X = k$ est réalisé, on constitue une urne avec k boules numérotées de 1 à k. Puis on tire une boule dans l'urne et son numéro est représenté par la variable Y.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi marginale de Y, ainsi que son espérance.

Exercice E3.14 ⚙⚙

Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant les lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Montrer que $P(X = k | X + Y = r) = \dfrac{\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}}{\binom{m+n}{r}}$.

Exercice E3.15 ⚙

Dans une urne contenant n jetons numérotés, on en tire 2, avec remise. On note (r, s) les deux numéros obtenus. Puis on tire une boule au hasard dans une urne qui en contient r rouges et s jaunes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j}$.
2. Quelle est la probabilité d'avoir une boule verte ? Commenter.

Exercice E3.16 ⚙

Dans une urne contenant n jetons numérotés, on en tire 2 successivement, sans remise. On note X le numéro du premier, Y le numéro du second. Les VA X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer les lois de X, Y et (X, Y).

Exercice E3.17 ⚙

Soit $p \in [0, 1]$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Bernoulli de paramètres respectifs p et q. On note $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (S, D).
2. Déterminer la covariance de S et D. Sont-elles indépendantes ?

Exercice E3.18 ⚙⚙

En attendant le concert de Taylor Swift, les fans vont manger un morceau. Les n fans choisissent aléatoirement (et individuellement) un des p stands de nourriture. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note X_i le nombre de fans qui se dirigent vers le stand numéro i.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i.
2. Soit $i, j \in [\![1, p]\!]$ tels que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X_i + X_j$.
   (b) En déduire la covariance de X_i et X_j.
3. Pour tout $I \subset [\![1, p]\!]$, on note $Y_I = \displaystyle\sum_{i \in I} X_i$.
   (a) Soit $I \subset [\![1, p]\!]$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_I en fonction du cardinal de I.
   (b) Soit I, J deux parties de $[\![1, p]\!]$. Déterminer $\mathrm{Cov}(Y_I, Y_J)$ si I et J sont disjointes puis traiter le cas général (en fonction de $|I|, |J|$ et $|I \cap J|$).