Problème 1

A Relation de conjugaison

1.
   - $\forall h \in S_n,\ h = \operatorname{id} h \operatorname{id}^{-1}$,
   - $\forall h_1, h_2 \in S_n$, si h_1 et h_2 sont conjuguées, soit $\sigma \in S_n$ telle que $h_2 = \sigma h_1 \sigma^{-1}$.
     Alors $h_1 = \sigma^{-1} h_2 \sigma$ avec $\sigma^{-1} \in S_n$ et $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$. Donc h_2 et h_1 sont conjuguées.
   - Soit h_1, h_2 et h_3 dans S_n telles que h_1 et h_2 soient conjuguées et h_2 et h_3 soient conjuguées. On pose $\sigma, \tau \in S_n$ telles que $h_2 = \sigma h_1 \sigma^{-1}$ et $h_3 = \tau h_2 \tau^{-1}$. Alors $h_3 = \tau\sigma h_1 \sigma^{-1}\tau^{-1}$ et on a bien $\tau\sigma \in S_n$ et $\sigma^{-1}\tau^{-1} = (\tau\sigma)^{-1}$.

   On a donc bien une $\boxed{\text{relation d'équivalence sur } S_n}$.

2. (a) $\langle (12) \rangle = \{\operatorname{id}, (12)\}$ et $\boxed{\text{n'est pas un sous-groupe distingué de } S_3}$ car avec $\sigma = (13)$, on a

$$\sigma(12)\sigma^{-1} = (13)(12)(13) = (23) \notin \langle (12) \rangle.$$

   (b) Soit $n \geqslant 2$. Soit $h \in A_n$ et $\sigma \in S_n$. Alors $\varepsilon(\sigma h \sigma^{-1}) = \varepsilon(h)$ par les propriétés de morphisme de la signature. Donc $\sigma h \sigma^{-1} \in A_n$. □

B Étude de A_5

3. Soit $\sigma \in A_n$ telle que $\sigma \neq \operatorname{id}$.
   On décompose σ en produit de cycles à supports disjoints. On a
   - soit un 2-cycle : exclu du fait de la signature,
   - soit $\boxed{\text{un 3-cycle}}$,
   - soit un 4-cycle : exclu du fait de la signature,
   - soit $\boxed{\text{un 5-cycle}}$,
   - soit deux 2-cycles : σ est alors $\boxed{\text{produit de deux transpositions à supports disjoints}}$,
   - soit un 2-cycle et un 3-cycle : exclu du fait de la signature.

4. **Les 3-cycles :** On choisit une partie à 3 éléments de $[\![1,5]\!]$, il y a $\binom{5}{3} = 10$ possibilités.

   Chacune ($\{a,b,c\}$) donne lieu à deux 3-cycles : (abc) et (acb) (les 4 autres présentations possibles sont des permutations circulaires de ces deux cycles). Il y a donc $\boxed{\text{20 3-cycles}}$ dans A_5.

   Les 5-cycles : Les 5 éléments de $[\![1,5]\!]$ sont présents. À permutation circulaire près, on peut fixer qu'on écrit le 1 en premier. Ainsi chaque cycle s'écrit de manière unique $(1abcd)$ où (a,b,c,d) est une permutation de $[\![2,5]\!]$. Finalement, il y a autant de 5-cycles que de permutations de $[\![2,5]\!]$, soit $\boxed{\text{24 5-cycles dans } S_5}$.

   Les doubles permutations : Elles représentent le complémentaire dans A_5, de cardinal 60, des deux parties précédentes, sans oublier l'identité.
   Il y a donc $60 - 24 - 20 - 1 = \boxed{\text{15 doubles permutations dans } S_5}$.

(a) Soit $n \geqslant 5$ et $2 \leqslant p \leqslant n$. Soit $\alpha = (a_1 \dots a_p)$ et $\beta = (b_1 \dots b_p)$ deux p-cycles de S_n.
Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(a_i) = b_i$.
Alors $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ (calcul déjà fait en exercice). Ainsi $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont conjugués dans } S_n}$.

(b) i. Soit $\alpha = (abc)$ et $\beta = (def)$ deux 3-cycles. D'après ce qui précède, il existe $\sigma \in S_5$ telle que $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$.

- Si $\sigma \in A_5$, c'est terminé.
- Si $\varepsilon(\sigma) = -1$, soit i, j les nombres de $[\![1, 5]\!]$ différents de a, b, c. Alors on vérifie que $\sigma' = (ij)\sigma$ convient : $\sigma' \in A_5$ et $\beta = \sigma'\alpha\sigma'^{-1}$.

Ainsi $\boxed{\text{tous les 3-cycles sont conjugués}}$.

ii. Soit $\tau = (ab)(cd)$ et $\tau' = (a'b')(c'd')$ deux doubles transpositions. On note e et e' le nombre stabilisé par τ et τ' respectivement.
D'après la question précédente, (abe) et $(a'b'e')$ sont conjugués dans A_5. Donc il existe $\sigma \in A_5$ telle que $(a'b'e') = \sigma(abe)\sigma^{-1}$.
De plus σ envoie $\{c, d\}$ sur $\{c', d'\}$. On vérifie alors que $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$.
Ainsi $\boxed{\text{toutes les doubles transpositions sont conjuguées}}$.

On admet qu'il en va de même pour les 5-cycles.

5. Soit H un sous-groupe **distingué** de A_5 non réduit à l'identité. Il est de cardinal divisant 60.
S'il contient un 3-cycle (resp. un 5-cycle, resp. une double transposition), alors il les contient tous.
S'il ne contient que les 3-cycles, alors il est de cardinal 21 (20 3-cycles et l'identité), qui ne divise pas 60.
S'il ne contient que les 5-cycles, alors il est de cardinal 25 (24 5-cycles et l'identité), qui ne divise pas 60.
S'il ne contient que les doubles transpositions, alors il est de cardinal 16 (20 3-cycles et l'identité), qui ne divise pas 60.
Donc H contient au moins deux de ces ensembles, ce qui le rend de cardinal supérieur à 30.
Donc il est nécessairement de cardinal 60, donc $\boxed{H = A_5}$.