Chapitre D6

Déterminant

Objectifs

- Notion de déterminant.
- Caractérisation théorique du déterminant.
- Lien avec l'inversibilité.
- Calcul pratique de déterminant.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention contraire, n est un entier naturel non nul et E un ev de dimension n.

1 Applications multilinéaires

Définition D6.1

Soit $E_1, \dots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-ev. On dit qu'une application $f : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ est **n-linéaire** lorsque pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n$,

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \text{ est linéaire de } E_k \text{ dans } F.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**. On dit **bilinéaire**, **trilinéaire** pour 2-linéaire, 3-linéaire respectivement.

Définition D6.2

On dit qu'une forme n-linéaire sur E^n est **alternée** lorsque $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ dont (au moins) deux vecteurs sont égaux.

Proposition et définition D6.3

Soit $n \geqslant 2$ et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. On pose $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

(i) On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteur x_i une combinaison linéaire des autres (invariance par transvection).

(ii) Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

(iii) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$. Alors

$$f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots).$$

(iv) Soit $\sigma \in S_n$. Alors

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n).$$

Lorsqu'une des deux dernières propriétés est vérifiée, on dit que f est **antisymétrique**.

Proposition D6.4

Toute forme n-linéaire antisymétrique est alternée.

2 Déterminant

2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Théorème et définition D6.5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E Il existe une unique application $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire et alternée qui prend la valeur 1 en $(e_1, \dots, e_n)$. On l'appelle **déterminant dans la base $\mathcal{B}$**, notée $\det_{\mathcal{B}}$. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si on note (a_{ij}) la matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Proposition D6.6

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

(i) Formule de changement de base : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$.

(ii) Caractérisation des bases : $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{boB}(\mathcal{F}) \neq 0$

2.2 Déterminant d'une matrice

Définition D6.7

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle**déterminant de la matrice** A le nombre

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n),$$

où les C_i sont les colonnes de la matrices A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Notation. On note

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proposition D6.8

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Proposition D6.9

(i) $\det(I_n) = 1$.

(ii) Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(iii) Le déterminant d'une matrice ayant deux lignes égales ou deux colonnes égales est nul.

(iv) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(v) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(vi) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(A^{\intercal})$.

Corollaire D6.10

det induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$.

2.3 Calcul pratique

Proposition D6.11

(i) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

(ii) Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

Proposition D6.12

Le déterminant d'une matrice est inchangé lorsqu'on ajoute à une ligne (resp. une colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. colonne).

Remarque. En particulier, on peut effectuer certaines opérations d'une méthode de pivot de Gauß sans changer la valeur du déterminant. Plus précisément, il suffit de s'interdire toute transvection de diagonale non constante égale à 1. Dès lors on peut espérer se ramener à un calcul de déterminant plus simple.

Définition D6.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

(i) On appelle **mineur** de A de position (i, j) le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j. OOn notera $\Delta_{ij}(A)$ ce déterminant.

(ii) On appelle **cofacteur** de A de position (i, j) le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$.

(iii) On appelle **comatrice** de A la matrice $\left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

3 Interprétations du déterminant

Théorème et définition D6.14

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ considérée. Ce nombre s'appelle **déterminant de** u, noté $\det(u)$.

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.

Définition D6.15 (Déterminant d'une famille de vecteurs)

Soit X une famille de n vecteurs de E. On appelle **déterminant de** X **dans la base** $\mathcal{B}$ le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$, noté $\det_{\mathcal{B}}(X)$.

Théorème D6.16

Avec les notations ci-dessus, la famille X est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(X) \neq 0$.

Proposition D6.17 (Interprétations géométriques)

- Dans le cas $n = 2$, le déterminant d'une famille de deux vecteurs (x_1, x_2) dans la base (b_1, b_2) représente l'aire du parallélogramme de côtés x_1 et x_2, l'unité d'aire étant celle du parallélogramme de côtés b_1 et b_2, affectée d'un signe représentant l'orientation de (x_1, x_2) par rapport à celle de (b_1, b_2).
- Avec des conventions similaires dans le cas $n = 3$, le déterminant de (x_1, x_2, x_3) dans la base (b_1, b_2, b_3) représente le volume algébrique du parallélépipède de côtés x_1, x_2 et x_3.

Théorème et définition D6.18

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme de E. On appelle **déterminant de** u et on note $\det u$ le déterminant de toute matrice représentant u dans une base de E. Notamment, cette quantité ne dépend pas de la base choisie.

Proposition D6.19

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.
- $\det(v \circ u) = (\det v)(\det u)$.
- $u \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $\det u \neq 0$. Dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Proposition D6.20

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $X = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det u \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$