Devoir maison n° 22

Problème 1

On considère un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait de cette urne successivement et sans remise deux jetons. On considère un espace probabilisé (Ω, P) fini qui modélise cette expérience aléatoire et les variables aléatoires suivantes, définies sur Ω :

— N_i la variable aléatoire égale au numéro du i-ème jeton tiré, pour $i \in \{1, 2\}$.

— X la variable aléatoire égale au plus petit des numéros des jetons tirés.

— Y la variable aléatoire égale au plus grand des numéros des jetons tirés.

A Calculs préliminaires

1. Soient $q, n \in \mathbb{N}$ tels que $q \leq n+1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.
2. En déduire une expression factorisée des sommes suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2).$$

B Étude de N_1 et N_2.

3. Quelle est la loi de N_1 ?
4. Déterminer la loi conjointe de N_1 et de N_2, *i.e.* calculer $P(N_1 = i, N_2 = j)$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.
5. En déduire la loi de N_2. Comparer les lois de N_1 et de N_2.
6. En déduire l'espérance et la variance de N_1 et de N_2.
7. Calculer $\mathbb{E}(N_1 N_2)$. En déduire $\mathrm{Cov}(N_1, N_2)$.
8. Exprimer $\mathbb{V}(N_1 + N_2)$ sous forme factorisée.

C Étude de X et Y.

9. Déterminer la loi conjointe de X et de Y.
10. En déduire les lois de X et de Y.
11. Calculer $P(X = i | Y = j)$ et $P(Y = j | X = i)$, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $1 \leq i < j \leq n$. Que peut-on remarquer ?
12. Comparer les lois des variables aléatoires $n + 1 - X$ et Y. En déduire des relations entre $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ d'une part, et $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ d'autre part.
13. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, puis $\mathbb{E}(X)$.
14. Exprimer sous forme factorisée $\mathbb{E}(Y(Y-2))$, puis $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X)$.
15. Quelle relation à-t-on entre X, Y, N_1 et N_2 ? En déduire $\mathbb{V}(X+Y)$ puis $\mathrm{Cov}(X, Y)$ sous forme factorisée.

16. En déduire le coefficient de corrélation linéaire ρ de X et Y, défini par :

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On remarquera que ρ est indépendant de n.

Problème 2 **Polygones emboîtés**

On considère une suite de polygones à n sommets ($n \geqslant 3$) notés de la manière suivante. Les sommets du k-ième polygone sont les points $A_i^{(k)}$ pour $i = 1, \dots, n$. On note $a_i^{(k)}$ leurs affixes dans le plan complexe. Ainsi on démarre avec n points $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_n^{(1)}$ d'affixes respectives $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}$. Puis la suite est définie par récurrence : pour $k \in \mathbb{N}$, étant donnés les n points $A_i^{(k)}$ pour $i = 1, \dots, n$, on définit $A_i^{(k+1)}$ comme le milieu de $A_i^{(k)}$ et $A_{i+1}^{(k)}$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Et évidemment (de manière cyclique) $A_n^{(k+1)}$ est le milieu de $A_n^{(k)}$ et $A_1^{(k)}$. Ainsi pour résumer :

$$\begin{cases} A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_n^{(1)} \text{ sont donnés,} \\ \forall 0 \leqslant i \leqslant n-1, A_i^{(k+1)} \text{ est le milieu de } A_i^{(k)} \text{ et } A_{i+1}^{(k)}, \\ A_n^{(k+1)} \text{ est le milieu de } A_n^{(k)} \text{ et } A_1^{(k)} \end{cases}$$

Conseil préliminaire. Prendre une feuille de brouillon lire attentivement ce qui précède et faire un dessin des premiers polygones de cette suite dans le cas $n = 4$ ou 5.

1. **Modélisation matricielle du problème.** On note

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\, V^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ a_2^{(k)} \\ \vdots \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

   (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer les coordonnées de $V^{(k+1)}$ en fonction de celles de $V^{(k)}$.

   (b) Déterminer la matrice A telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $V^{(k+1)} = AV^{(k)}$ puis exprimer matriciellement $V^{(k)}$ en fonction de A et $V^{(1)}$.

2. **Déterminant circulant.** Soient $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}^n$. Le but de cette partie est de calculer le déterminant

$$\det B = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ b_n & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_n & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_2 & b_3 & \dots & b_n & b_1 \end{vmatrix}$$

   où chaque ligne de la matrice B se déduit de la précédente par permutation circulaire. On appelle P le polynôme $P(X) = b_1 + b_2 X + \dots + b_n X^{n-1}$. On pose également $\omega = e^{2i\pi/n}$ et Ω la matrice la matrice de taille n et de coefficients $\Omega_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$, soit

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le produit des matrices $B\Omega$: on exprimera ses coefficients en fonction de ω et P.

(b) En déduire que $\det A = \prod_{i=1}^{n} P(\omega^i)$.

3. **Diagonalisation de A**

(a) À l'aide de ce qui précède déterminer pour quelles valeurs de λ l'espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est non vide (on assimile par un léger abus de notation le noyau d'une matrice et le noyau du morphisme qu'elle représente).

(b) En déduire qu'il existe une matrice inversible Q (qu'on ne cherchera pas à déterminer) telle que $A = QDQ^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\omega^0}{2} & & \mathbf{(0)} \\ & \ddots & \\ \mathbf{(0)} & & \frac{1+\omega^{n-1}}{2} \end{pmatrix}.$$

4. **Conclusion.**

(a) Déduire de ce qui précède que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, la suite de nombres complexes $(a_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ_i sa limite. Ainsi on obtient également la convergence de la suite de points $(A_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vers un point L_i d'affixe ℓ_i.

(b) Montrer que tous les L_i sont égaux et déterminer ce point limite commun.