

# CHAPITRE B9

## INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

### Objectifs

- Fonctions lipschitziennes et uniformément continues.
- Principe d'une approximation uniforme.
- Construction de l'intégrale.

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $I$  désigne un intervalle et  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ .

### 1 Uniforme continuité

#### Définition B9.1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction. On dit que  $f$  est **uniformément continue** sur  $I$  lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

#### Définition B9.2

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction et  $K \in \mathbb{R}_+$ . On dit que  $f$  est  **$K$ -lipschitzienne** sur  $I$  lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| < K|x - y|.$$

On dit que  $f$  est **lipschitzienne** sur  $I$  lorsqu'il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  telle qu'elle soit  $K$ -lipschitzienne.

#### Proposition B9.3

- Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle  $y$  est uniformément continue.
- Toute fonction uniformément continue sur un intervalle  $y$  est continue.

**Théorème B9.4 (Heine)**

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

## 2 Continuité par morceaux

**Définition B9.5**

On appelle **subdivision de**  $[a, b]$  toute famille  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ .

## 2.1 Fonctions en escalier

**Définition B9.6**

On dit qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f$  est constante sur  $]a_k, a_{k+1}[$ . Une telle subdivision est alors dite **adaptée** à  $f$ .

**Notation.** L'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\text{Esc}([a, b], \mathbb{K})$ .

**Proposition B9.7**

Soit  $f, g \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- (i) L'ajout d'un nombre fini de points à une subdivision adaptée à  $f$  en fait encore une subdivision adaptée à  $f$ .
- (ii) La réunion de deux subdivisions adaptées respectivement à  $f$  et  $g$  est une subdivision adaptée à  $f$  et à  $g$ .

Les fonctions  $|f|$ ,  $\text{Re } f$ ,  $\text{Im } f$ ,  $\lambda f$ ,  $f + g$  et  $fg$  sont en escalier sur  $[a, b]$ .

## 2.2 Fonctions continues par morceaux

**Définition B9.8**

On dit qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$  est continue sur  $]a_k, a_{k+1}[$  et prolongeable par continuité en  $a_k$  et  $a_{k+1}$ . Une telle subdivision est alors dite **adaptée** à  $f$ .

**Notation.** L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ .

**Proposition B9.9**

Soit  $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Les fonctions  $|f|$ ,  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$ ,  $\lambda f$ ,  $f + g$  et  $fg$  sont également dans  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ .

**Théorème et définition B9.10**

Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est bornée. On appelle **norme infinie de  $f$**  et on note  $\|f\|_\infty = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ .

**2.3 Approximation uniforme par des fonctions en escalier****Proposition B9.11**

Soit  $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ .

- (i)  $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .
- (ii)  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .

**Définition B9.12**

Soit  $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ .

- (i) On appelle **distance uniforme** le réel  $\|f - g\|_\infty$ .
- (ii) On dit qu'une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}))^\mathbb{N}$  **converge uniformément** vers  $f$  sur  $[a, b]$  lorsque  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On dit alors que  $f$  est la **limite uniforme** de la fonction  $f_n$ .

**Théorème B9.13**

Toute fonction  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$  est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur  $[a, b]$ .



### 3 Construction de l'intégrale

#### 3.1 Fonctions en escalier

##### Théorème et définition B9.14

Soit  $f \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{K})$  et  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  une subdivision adaptée à  $f$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note  $y_i$  la valeur de  $f$  sur  $]a_i, a_{i+1}[$ .

Alors le nombre  $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) y_i$  ne dépend pas de la subdivision  $\sigma$  choisie. On l'appelle **intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$**  et on le note  $\int_{[a,b]} f$  ou  $\int_{[a,b]} f(t) dt$ .

##### Proposition B9.15

Soit  $f, g \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{K})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

(i) Linéarité :  $\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$ .

(ii) Inégalité triangulaire (améliorée) :  $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq (b-a) \|f\|_\infty$ .

#### 3.2 Fonctions continues par morceaux

##### Théorème et définition B9.16

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ . Pour toute suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions en escalier qui converge uniformément vers  $f$ , la suite  $\left( \int_{[a,b]} \varphi_p \right)_{p \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{K}$  vers une limite qui ne dépend pas du choix de la suite  $(\varphi_n)$ .

Cette limite s'appelle **intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$**  et est notée  $\int_{[a,b]} f$  ou  $\int_{[a,b]} f(t) dt$ .

**Proposition B9.17**

Soit  $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

- (i) Linéarité :  $\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$ .
- (ii) Inégalité triangulaire :  $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq (b-a) \|f\|_\infty$ .
- (iii) Relation de Chasles :  $\forall c \in [a, b], \int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ .
- (iv) Parties réelle et imaginaire :  $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im}(f)$ .
- (v) Si  $f$  et  $g$  coïncident sauf en un nombre fini de valeurs, alors  $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$ .

**Proposition B9.18**

Soit  $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$

- (i) Si  $f \geq 0$ , alors  $\int_{[a,b]} f \geq 0$ .
- (ii) Si  $f \leq g$ , alors  $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$ .

**Notation.** Pour  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  et  $a, b \in I$ , on note  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$  si  $a \leq b$  et  $\int_a^b f = - \int_{[b,a]} f$  si  $a > b$ .

**Remarque.** Les théorèmes d'intégration énoncés précédemment découlent naturellement de cette définition étendue :

- théorème fondamental de l'analyse,
- théorème fondamental du calcul intégral,
- intégration par parties,
- changement de variable,
- formule de Taylor avec reste intégral,
- inégalité de Taylor-Lagrange (que l'on peut maintenant énoncer avec la notation  $\|\cdot\|_\infty$ ),



## 4 Approximation d'intégrales

### Théorème B9.19 (Sommes de Riemann)

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ .

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

**Remarques.**

- On a de même  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ .
- Si  $f \in \mathcal{CM}([0, 1], \mathbb{K})$ , alors  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$ . On peut toujours se ramener à ce cas, quitte à effectuer un changement de variable affine.

### Méthodes

- Calculer une limite à l'aide d'une somme de Riemann.