

CHAPITRE B10

FAMILLES SOMMABLES

Objectifs

- Sommabilité d'une famille.
- Manipulations d'une somme (paquets, Fubini).

1 Familles sommables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

Notation. On note $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On y étend les lois $+$ et \times et la relation d'ordre \leq .

Proposition B10.1

Soit $A \subset [0, +\infty]$. Alors A admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$. Si A est majoré, sa borne supérieure, notée $\sup A$, coïncide avec celle dans \mathbb{R} . Sinon, $\sup A = +\infty$.

1.1 Sommabilité

Notation. Étant donné un ensemble I , on note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I .

Définition B10.2

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$.

- (i) On appelle **somme** de la famille $(u_i)_{i \in I}$ et on note $\sum_{i \in I} u_i$ la borne supérieure (dans $[0, +\infty]$) de l'ensemble des sommes sur les sous-familles finies. Autrement dit,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}.$$

- (ii) On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** lorsque $\sum_{i \in I} u_i$ est finie.

**Proposition B10.3**

- (i) Si I est fini, alors la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ coïncide avec la somme finie $\sum_{i \in I} u_i$.
- (ii) Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est à support fini, alors elle est sommable et sa somme coïncide avec la somme (finie) de ses termes non nuls.
- (iii) Si un de ses éléments vaut $+\infty$, alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Proposition B10.4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Alors on a équivalence entre

- (i) La famille $(u_n)_{n \geq n_0}$ est sommable.
- (ii) La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.

Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

1.2 Propriétés**Théorème B10.5 (Comparaison)**

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles à valeurs dans $[0, +\infty]$ telles que $\forall i \in I, u_i \leq v_i$. Alors

- (i) $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.
- (ii) Si $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.
- (iii) Si $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, alors $(v_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Proposition B10.6

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille à valeurs dans $[0, +\infty]$ et $J \subset I$. Alors

- (i) $\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$.
- (ii) Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in J}$ est sommable.
- (iii) Si $(u_i)_{i \in J}$ n'est pas sommable, alors $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Théorème B10.7 (Changement d'indice)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ et $\varphi : J \rightarrow I$ une bijection. Alors

- (i) $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} u_{\varphi(j)}$.
- (ii) $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(j)})_{j \in J}$ est sommable.
- (iii) Si $(u_i)_{i \in J}$ n'est pas sommable, alors $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Proposition B10.8

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles à valeurs dans $[0, +\infty]$ et $\lambda \in]0, +\infty[$.

- (i) $\sum_{i \in I} u_i + v_i = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$.
- (ii) $(u_i + v_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables.
- (iii) $\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$.
- (iv) $(\lambda u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

1.3 Sommation par paquets et Fubini**Théorème B10.9 (Sommmation par paquets positif)**

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ et $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I . Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i.$$


Théorème B10.10 (Fubini positif)

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. Alors $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j} =$

$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable,
- (ii) $\left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)_{j \in J}$ est sommable,
- (iii) $\left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)_{i \in I}$ est sommable.

2 Cas général

Désormais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

2.1 Sommabilité

Définition B10.11

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{K} . On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Notation. On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indexées par I .

Définition et proposition B10.12

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{C} . Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

Définition et proposition B10.13

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{C} . Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i).$$

Proposition B10.14

- (i) Si I est fini, alors la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ coïncide avec la somme finie $\sum_{i \in I} u_i$.
- (ii) Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est à support fini, alors elle est sommable et sa somme coïncide avec la somme (finie) de ses termes non nuls.

Proposition B10.15

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} . Alors on a équivalence entre

- (i) La famille $(u_n)_{n \geq n_0}$ est sommable.
- (ii) La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente.

Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

2.2 Propriétés**Proposition B10.16**

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille à valeurs dans \mathbb{K} et $J \subset I$. Alors

- (i) Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in J}$ est sommable.
- (ii) Si $(u_i)_{i \in J}$ n'est pas sommable, alors $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Théorème B10.17 (Changement d'indice)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{K} et $\varphi : J \rightarrow I$ une bijection. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(j)})_{j \in J}$ est sommable. Dans ce cas, on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} u_{\varphi(j)}.$$

Proposition B10.18 (Linéarité)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles sommables à valeurs dans \mathbb{K} et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i$.


Proposition B10.19 (Inégalité triangulaire)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable à valeurs dans \mathbb{K} . Alors

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|.$$

2.3 Sommation par paquets et Fubini
Théorème B10.20 (Somme par paquets)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ et $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I . Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors

- (i) pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable,
- (ii) $\left(\sum_{i \in I_k} u_i \right)_{k \in K}$ est sommable,
- (iii) $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i$.

Théorème B10.21 (Fubini)

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille sommable à valeurs dans \mathbb{K} .

- (i) $\left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)_{j \in J}$ est sommable,
- (ii) $\left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)_{i \in I}$ est sommable.
- (iii) $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$.

Proposition B10.22

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_j)_{j \in J}$ deux familles sommables à valeurs dans \mathbb{K} . Alors

- (i) la famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable,
- (ii) $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \left(\sum_{i \in I} u_i \right) \left(\sum_{j \in J} v_j \right)$.

Méthodes

- Vérifier la sommabilité d'une famille.
- Calculer la somme d'une famille sommable.