TD B10. Familles sommables

Exercice B10.1 ⚙

Étudier la sommabilité des familles suivantes.

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{\substack{x\in\mathbb{Q}\\ x\geqslant 1}}$,
2. $\left(\frac{1}{(2p+1)2^q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$,
3. $\left(\frac{1}{(2p+1)^2 2^q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$.

Exercice B10.2 ⚙⚙

La famille $\left(\frac{1}{n^2-p^2}\right)_{\substack{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\neq p}}$ est-elle sommable ?

Exercice B10.3 ⚙

Calculer dans $[0,+\infty]$ la somme des familles suivantes.

1. $\left(\frac{1}{k!}\right)_{0\leqslant n\leqslant k}$,
2. $\left(\frac{2^{2k-n}}{k!}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$,
3. ⚙⚙ $\left(\frac{1}{p!q!(p+q+1}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$.

Exercice B10.4 ⚙⚙

Déterminer à quelle condition sur $z, z' \in \mathbb{C}$ les familles suivantes sont sommables et calculer leur somme.

1. $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$,
2. $\left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$,
3. $\left(\binom{p+q}{p} z^{p+q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

Exercice B10.5 ⚙⚙

Pour tout $n>2$, on note $\zeta(n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^n}$.

1. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.
2. On admet que $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$. Calculer
   (a) $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$,
   (b) $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$,
   (c) $\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{m^2n^2}$,
   (d) $\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m<n}}\frac{1}{m^2n^2}$,
   (e) $\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m\div n}}\frac{1}{m^2n^2}$,
   (f) ⚙⚙⚙ $\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m\wedge n=1}}\frac{1}{m^2n^2}$.

Exercice B10.6 ⚙

Soit $r,\theta\in\mathbb{R}$. Donner une condition suffisante pour que la famille $\left(r^{|z|}e^{iz\theta}\right)_{z\in\mathbb{Z}}$ soit sommable et, dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice B10.7 ⚙⚙

Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que $(x^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$, où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n.

Exercice B10.8 ⚙⚙

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ une série de nombres réels ou complexes que l'on suppose absolument convergente. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{D_n}{n(n+1)}$ est aussi absolument convergente et que les sommes de ces deux séries sont égales.