Chapitre D7

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire, norme

Définition D7.1

On appelle **produit scalaire** sur E une application $\langle \cdot\,,\cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire

- $\forall x_1, x_2, y \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \mu \langle x_2, y \rangle$,
  $\forall x, y_1, y_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \mu \langle x, y_2 \rangle$,
- $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geqslant 0$,
- $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Notations. On peut rencontrer les notations $(x|y)$, $\langle x|y \rangle$ ou encore $x \cdot y$.

Définition D7.2

(i) Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien réel**.
(ii) Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

Définition D7.3

Soit E un espace préhilbertien réel.

(i) Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. L'application $N : x \mapsto \|x\|$ est appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$.
Un vecteur de norme 1 est appelé **vecteur unitaire**.

(ii) La **distance euclidienne** associée à la norme euclidienne est l'application

$$\mathrm{d} : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}$$

Théorème D7.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall x, y \in E,\ |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition D7.5

La norme euclidienne vérifie

(i) (homogénéité) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

(ii) (positivité et séparation) $\forall x \in E,\ \|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,

(iii) (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in \mathrm{E},\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Proposition D7.6 (Identité de polarisation)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Proposition D7.7 (Identité du parallélogramme)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs et familles orthogonaux

Définition D7.8

Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

(i) Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$.

(ii) Une famille de vecteurs de E est une **famille orthogonale** si deux vecteurs quelconques de cette famille sont toujours orthogonaux.

(iii) Si de plus tous ses vecteurs sont unitaires, la famille est dite **orthonormée**.

Remarque. En utilisant le symbole de Kronecker, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormée, on a

$$\forall i, j \in I,\ \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Proposition D7.9

Dans un espace euclidien, toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre.

Remarque. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Définition D7.10

Dans un espace euclidien E, une famille orthonormée qui est une base de E est appelée **base orthonormée (b.o.n.)** de E.

Théorème D7.11 (Pythagore)

Soient E un espace préhilbertien réel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale. Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

2.2 Bases orthonormées

Proposition D7.12

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Les composantes dans cette base de tout vecteur $x \in E$ sont données par

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Proposition D7.13

Avec les notations ci-dessus, le produit scalaire des vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

et la norme de x est donnée par

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

Théorème D7.14 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soient E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre quelconque de E. Alors il existe une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que

- $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est orthonormée,
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathrm{Vect}(\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}) = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\})$.

Si l'on ajoute la condition $\langle \varepsilon_i, e_i \rangle > 0$ pour tout i, alors cette famille est unique.

Remarque. La démonstration constructive de cette propriété donne un algorithme pour construire la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$:

- Tout d'abord
$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$
- Supposons construits $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$). Alors on pose
$$\varepsilon'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \quad \text{puis} \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon'_{k+1}}{\|\varepsilon'_{k+1}\|}.$$

Théorème D7.15

(i) Tout espace euclidien possède des bases orthogonales et des bases orthonormées.

(ii) Toute famille orthonormée (resp. orthogonale) d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée (resp.orthogonale).

3 Projecteurs orthogonaux

3.1 Sous-espaces orthogonaux

Définition D7.16

Soit E un espace préhilbertien réel.

(i) On dit que deux parties X et Y de E sont orthogonales lorsque
$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ \langle x, y \rangle = 0.$$

(ii) Soit X une partie de E. On appelle **orthogonal de** X l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de X, noté
$$X^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in X,\ \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Proposition D7.17

Soit X, Y deux parties d'un espace préhilbertien E.

(i) $X \subset Y^\perp \Leftrightarrow Y \subset X^\perp$,

(ii) $X^\perp$ est un sev de E,

(iii) $X \subset Y \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$,

(iv) $X^\perp = (\operatorname{Vect} X)^\perp$,

(v) $X \cap X^\perp = \{0_E\}$,

(vi) $X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$,

Théorème et définition D7.18

Soient E un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie de E. Alors l'orthogonal de F en est un supplémentaire, appelé **supplémentaire orthogonal** de F. On a

$$E = F \oplus F^\perp.$$

On a la propriété du **biorthogonal** : $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

3.2 Projection orthogonale

Définition D7.19

Soent E un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie de E. La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée **projection orthogonale sur** F, notée p_F.

Remarque. La décomposition de x sur $F \oplus F^\perp$ s'écrit alors

$$x = p_F(x) + \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp}$$

Proposition D7.20

Avec les notations ci-dessus et en notant $(e_1, \ldots, e_p)$ une b.o.n. de F, on a

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (x|e_k) e_k.$$

Proposition D7.21 (Inégalité de Bessel)

Avec les notations ci-dessus, on a

$$\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$

3.3 Distance à un sous-espace de dimension finie

Dans ce paragraphe, E désigne un espace préhilbertien réel et F un sev de E de dimension finie.

Définition D7.22

Soit $x \in E$. On appelle **distance de** x **à** F la borne inférieure des distances de x à un élément quelconque de F.

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Théorème D7.23

Étant donné $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément qui réalise la distance de x à F.

$$\|x - p_F(x)\| = \mathrm{d}(x, F).$$

Remarque. Évidemment si $x \in F$, cette distance est nulle et le projeté en question est x lui-même.