

TD D7. Espaces préhilbertiens

1 Produit scalaire

Exercice D7.1 ⚙

Pour chaque espace E , dire si l'application φ est un produit scalaire. Le cas échéant, calculer la norme de u pour la norme associée à ce p.s.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 2yy' + zz'$, $u = (1, 2, 3)$,

2. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$, $u = X$,

3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P, Q) = \int_0^\pi e^t P(t)Q(t) dt$, $u = 1$,

4. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P, Q) = \int_0^\pi \sin(t)P(t)Q(t) dt$, $u = 1$,

5. $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$ et $\varphi(f, g) = \int_0^1 (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) dt$, $u = \exp$,

6. $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$ et $\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$, $u = \exp$,

7. $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$ et $\varphi(f, g) = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$, $u = \exp$,

8. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B)$, $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D7.2

Soit E un espace préhilbertien pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs normés de E tels que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle^2$. Montrer que $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E .

Exercice D7.3 ⚙

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\varphi : (x, y) \mapsto \langle u(x), u(y) \rangle$ soit un produit scalaire.

Exercice D7.4 ⚙⚙

Soit $\mathcal{B} = \{(1, 2), (3, -1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

Exercice D7.5 ⚙⚙ ⌌

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$. Déterminer l'existence et la valeur de la borne inférieure de

$$A = \left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \mid f \in E \right\}.$$


Exercice D7.6 ⚙️

Soit E un espace euclidien de dimension n , on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On suppose que u est une **isométrie vectorielle** de E , i.e. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - Montrer que $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
 - Montrer que u est bijectif.
- On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E . Montrer que $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe.
- Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Montrer que

$$u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est une b.o.n. de } E.$$

2 Orthogonalité et projections

Exercice D7.7 ⚙️

Soit E un espace préhilbertien et F, G deux sev de E .

- Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, avec égalité si E est de dimension finie.

Exercice D7.8 ⚙️⚙️

Soit ℓ^2 l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2$ converge.

- Montrer que pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans ℓ^2 , la série $\sum x_n y_n$ est convergente.
- Montrer que $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ définit un produit scalaire sur ℓ^2 .
- Soit F l'ensemble des suites presque nulles (i.e. dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux). Déterminer $F^\perp$ et comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

Exercice D7.9 ⚙️

Soit E l'espace vectoriel des applications continues 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Montrer que $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice D7.10 ⚙️

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

- Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de $F^\perp$.
- Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F puis la distance de J à F .

Exercice D7.11 ⚙️

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormée pour F .
3. Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.

Exercice D7.12 ⚙️⚙️⚙️

Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice D7.13 ⚙️⚙️

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E .

1. Théorème de représentation de Riesz. Soit $\varphi \in E^*$. Montrer qu'il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle x, a \rangle.$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\forall x \in \mathbb{R}, y \mapsto \langle u(y), x \rangle$ est une forme linéaire. D'après ce qui précède, il existe donc un unique vecteur noté $u^*(x)$ tel que $\forall y \in E, \langle u(y), x \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle$. Ceci définit une application u^* , appelée **adjoint de u** .
 - (a) Déterminer $(\text{Id}_E)^*$.
 - (b) Montrer que $u \mapsto u^*$ est une symétrie de $\mathcal{L}(E)$.
 - (c) Montrer que $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{\text{T}}$.
4. Montrer que $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im } u)^{\perp}$.
5. Soit F un sev de E . Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par u^* .