

# TD B11. Fonctions de deux variables

## 1 Topologie, continuité

### Exercice B11.1

1. Soit  $]a, b[$  et  $]c, d[$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $]a, b[ \times ]c, d[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $U \times V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice B11.2

Soit  $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ .

1. Montrer que  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  dans toutes les directions.
2. Montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

## 2 Dérivation

### Exercice B11.3

Calculer les dérivées partielles de

1.  $a : (x, y) \mapsto x^2 + 3x2y^3 - 2xy + 4y - 28$ ,
2.  $b : (x, y) \mapsto \text{Arctan}(1 + xy)$ ,
3.  $c : (x, y) \mapsto \cos(3xy - y^2)$ ,
4.  $d : (x, y) \mapsto y \sin(\ln(x) - y^2)$ ,
5.  $e : (x, y) \mapsto x^y$ ,
6.  $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{xy^2}}{x + y}$ .

### Exercice B11.4

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\varphi : t \mapsto f\left(e^t, t + \frac{1}{t}\right)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et calculer l'expression de  $\varphi'$ .
2. Montrer que  $\psi : (u, v) \mapsto f(u + v, uv)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et calculer son gradient.
3. Exprimer les dérivées partielles de  $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

## 3 Équations aux dérivées partielles

### Exercice B11.5

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On dit que  $f$  est **homogène de degré**  $\alpha \in \mathbb{R}$  lorsque

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda > 0, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y).$$

1. Montrer que les dérivées partielles d'une fonction homogène sont également homogènes.
2. Montrer que  $f$  est homogène de degré  $\alpha$  si et seulement si  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ .

### Exercice B11.6

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Montrer que  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  si et seulement si  $\forall x, y, t \in \mathbb{R}^2, f(x + t, y + t) = f(x, y)$ .



## 4 Extrema

**Exercice B11.7** 

Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

1.  $f_1 : (x, y) \mapsto (x + y)^2 + x^4 + y^4$ ,
2.  $f_2 : (x, y) \mapsto -x^2 - xy - y^2 + 3y - 2$ ,
3.  $f_3 : (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^4$ ,
4.  $f_4 : (x, y) \mapsto e^{x \sin y}$ .