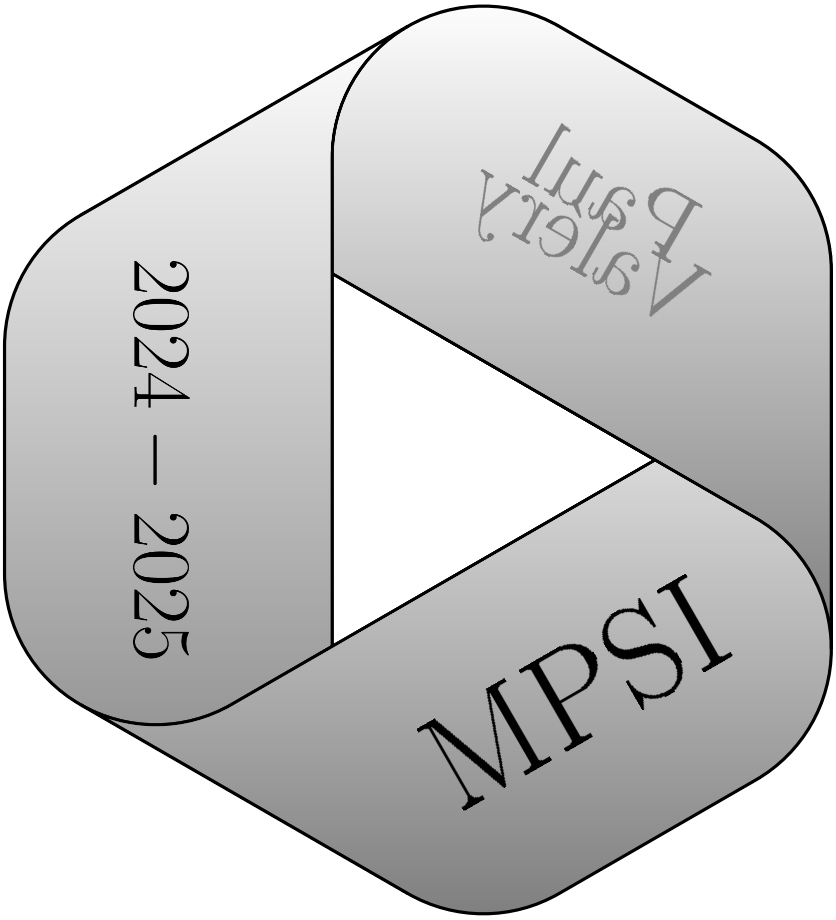
Résumé d'un cours de mathématiques



Clément Dunand

Les mathématiques ne sont pas une
moindre immensité que la mer.
(Victor Hugo)

Table des matières

D - De algebra lineari 191

Première partie

De rerum calculandi

Chapitre A1

Ensembles de nombres

Objectifs

➢ Parler d'ensembles de nombres, savoir parler d'inclusion.
➢ Savoir manipuler des inégalités de nombres réels.
➢ Notion d'intervalle.
➢ Outils réels : valeur absolue, partie entière.
➢ Notion de densité.

Notations. On désigne par

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs,
- $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Proposition A1.1

On a les inclusions
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1 Corps des nombres réels

Notations. On désigne par

- $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ des nombres réels, privé du nombre 0,
- $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls,
- $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.

1.1 Relation d'ordre

Proposition A1.2

La relation $\leqslant$ est une **relation d'ordre** sur $\mathbb{R}$, *i.e.* une relation

- **réflexive** : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant x$,
- **transitive** : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$,
- **antisymétrique** : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow x = y)$.

C'est une **relation d'ordre total** sur $\mathbb{R}$, *i.e.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x).$$

Proposition A1.3

Soit $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

Somme : si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c \leqslant b + d$.

Produit :

- si $a \leqslant b$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda a \leqslant \lambda b$,
- si $a \leqslant b$ et $\lambda \leqslant 0$, alors $\lambda a \geqslant \lambda b$,
- si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.

Inverse : si $a \leqslant b$ et a et b sont de même signe, alors $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$.

1.2 Intervalles

Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$, on définit

- des segments du type $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,
- des intervalles semi-ouverts du type $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$ ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$,
- des intervalles ouverts du type $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Définition A1.4

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un **intervalle de** $\mathbb{R}$ lorsque pour tous $a, b \in X$, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $a \leqslant x \leqslant b$, alors $x \in X$.

Proposition A1.5

Il y a 10 types d'intervalles de $\mathbb{R}$, à savoir, pour $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $\emptyset$,
2. $[a, b]$,
3. $[a, b[$,
4. $]a, b]$,
5. $]a, b[$,
6. $[a, +\infty[$,
7. $]a, +\infty[$,
8. $]-\infty, b]$,
9. $]-\infty, b[$,
10. $\mathbb{R}$

Définition A1.6

Les intervalles des types 1, 5, 7, 9, 10 sont dits **ouverts**, ceux des types 1, 2, 6, 8, 10 sont dits **fermés**. Un intervalle contenant au moins deux réels distincts est appelé **intervalle véritable**.

1.3 Valeur absolue

Définition A1.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x est le nombre réel $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ sinon.} \end{cases}$

Proposition A1.8

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Positivité : $|x| \geqslant 0$ et ($|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Encadrements :

- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$,
- $|x| \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant x \leqslant r$.
- $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$.

Opérations :

- $|xy| = |x||y|$,
- si $x \neq 0$, alors $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.

Théorème A1.9 (Inégalité triangulaire)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors
$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Dém. A1.9

- Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
  $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$ donc $x + y \leqslant |x| + |y|$.
  $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ donc $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$.
  Ces deux majorations montrent que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
- D'après la première inégalité : $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$ donc $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.
  De même (ou en appliquant cela à y et x en guise de x et y), $|y| - |x| \leqslant |x - y|$, soit $-(|x| - |y|) \leqslant |x - y|$.
  On a ainsi montré $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$

2 Nombres entiers

2.1 Sous-ensembles d'entiers

Proposition A1.10

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable par somme, différence et produit, *i.e.*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a+b \in \mathbb{Z},\ a-b \in \mathbb{Z} \text{ et } ab \in \mathbb{Z}.$$

Définition A1.11

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b, ou que a est **un diviseur** de b ou que b est **divisible** par a lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ b = ak.$$

On dit qu'un nombre entier est **pair** lorsqu'il est divisible par 2 et **impair** lorsqu'il ne l'est pas.

Notation. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On note $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de a.

Proposition A1.12

Soit $a \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $a\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ stable par somme, différence. De plus,

$$\forall m \in a\mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ nm \in a\mathbb{Z}.$$

Notation. Soit $a, b \in \mathbb{N}$. On désigne par $[\![a, b]\!]$ l'intervalle d'entiers $\{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

Proposition A1.13

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leqslant b$. L'intervalle d'entiers $[\![a, b]\!]$ contient $b - a + 1$ éléments.

Proposition A1.14

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

2.2 Partie entière

Définition A1.15 (Partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leqslant x$.

Proposition A1.16

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les deux encadrements :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Proposition A1.17

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\lfloor x \rfloor = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $p \leqslant \lfloor x \rfloor$ si et seulement si $p \leqslant x$.

Proposition A1.18

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) Propriété d'Archimède : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > x$.

(ii) Plus précisément, il existe un unique couple $(p, r) \in \mathbb{Z} \times [0, a[$ tel que $x = pa + r$. On a alors $p = \left\lfloor \dfrac{x}{a} \right\rfloor$.

3 Nombres rationnels

Définition A1.19

On dit qu'un nombre réel x est **rationnel** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \dfrac{p}{q}$.
Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

3.1 Approximation décimale

Définition A1.20

On dit qu'un nombre réel x est **décimal** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{p}{10^k}$.

Proposition et définition A1.21

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$. Les nombres a_n et b_n s'appellent **approximation décimale par défaut** et **par excès** de x et vérifient

$$a_n \leqslant x \leqslant b_n.$$

3.2 Densité

Proposition A1.22

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$, *i.e.* pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

$$\exists d \in \mathbb{D},\ d \in]a, b[.$$

Proposition A1.23

$\mathbb{Q}$ est stable par somme, différence, produit et inverse (sauf pour l'élément 0).

Proposition A1.24

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Méthodes

- Gérer une valeur absolue
  - ➢ en distinguant les cas,
  - ➢ en élevant au carré.
- Résoudre une équation ou une inéquation.
- Montrer qu'un nombre est irrationnel.
- Déterminer une partie entière.

Chapitre A2

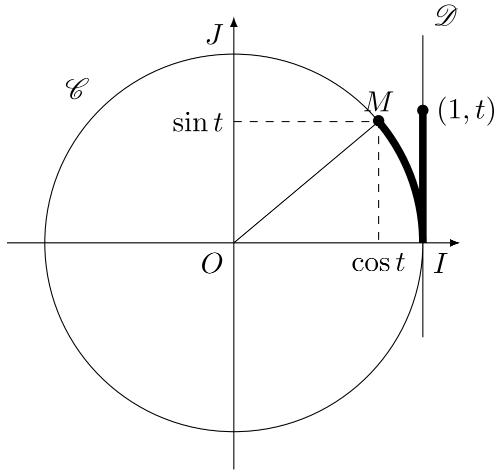
Trigonométrie

1 Le cercle trigonométrique

Soit $t \in \mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ étant le cercle trigonométrique, on place un point de coordonnées $(1, t)$ sur la droite $\mathscr{D}$. Puis on enroule la droite sur le cercle. Au point de coordonnées $(1, t)$ sur la droite correspondra un point M sur le cercle tel que l'arc de I à M ait pour longueur $|t|$ (éventuellement après avoir effectué plusieurs tours).

Définition A2.1

On appelle **cosinus** et **sinus** du nombre t, et on note $\cos(t)$ et $\sin(t)$, respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M.



Proposition A2.2

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$

Définition A2.3

On dit que deux nombres réels a et b sont **congrus modulo** 2π lorsqu'ils sont égaux, à un multiple de 2π près. On note

$$a \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + k \times 2\pi.$$

Proposition A2.4

Le nombre t est une mesure (en radians) de l'angle $\widehat{IOM}$.

2 Propriétés géométriques

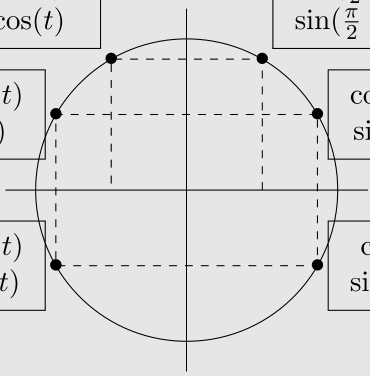
Proposition A2.5

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes.

$\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(t)$
$\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t)$

$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$

$\cos(\pi - t) = -\cos(t)$
$\sin(\pi - t) = \sin(t)$



$\cos t = \cos(t + 2\pi)$
$\sin t = \sin(t + 2\pi)$

$\cos(t + \pi) = -\cos(t)$
$\sin(t + \pi) = -\sin(t)$

$\cos(-t) = \cos(t)$
$\sin(-t) = -\sin(t)$

Proposition A2.6

On a les valeurs remarquables suivantes.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	

Proposition A2.7

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Proposition A2.8

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \equiv b\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv -b\,[2\pi] \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \sin a = \sin b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \equiv b\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv \pi - b\,[2\pi] \end{array} \right. .$$

3 Formules trigonométriques

Proposition A2.9

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Formules d'addition :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$,
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

(ii) Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$,
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.

(iii) Formules de linéarisation :

- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$,
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$,
- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$,
- $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$,
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

(iv) Formules de factorisation : soit $p, q \in \mathbb{R}$.

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

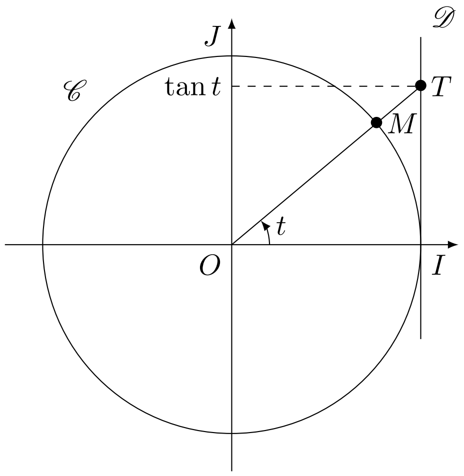
Proposition A2.10

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls et $t \in \mathbb{R}$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $a\cos t + b \sin t = r\cos(t-\varphi)$.

4 Tangente

Définition A2.11

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On note T le point d'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en I. On appelle **tangente** de t l'ordonnée de T, notée $\tan t$. On définit la **tangente** de t



Proposition A2.12

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Proposition A2.13

Soit $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \, [\pi]$. On a

- $\tan(t + \pi) = \tan t$,
- $\tan(\pi - t) = -\tan t$.
- Valeurs remarquables :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X

Proposition A2.14

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ non congrus à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

(i) Formules d'addition :

- si $a+b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$,
- si $a-b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

(ii) Formules de duplication : si $a \not\equiv \dfrac{\pi}{4}\,\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

(iii) Formules de changement de variable : soit $u = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

- $\cos a = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$,
- $\sin a = \dfrac{2u}{1+u^2}$,
- $\tan a = \dfrac{2u}{1-u^2}$,

Méthodes

- Résolutions d'équations et inéquations trigonométriques.

Chapitre A3

Calculs algébriques

Objectifs

- Notations et manipulations de sommes et produits.
- Sommes et produits usuels.
- Coefficients binomiaux.
- Formalisme des sommes doubles.

1 Sommes et produits

1.1 Notations et règles de calcul

Par souci de généralité, les notations et résultats de ce chapitre sont énoncés avec des nombres complexes, mais les exemples développés se limiteront aux calculs réels.

Notations. Étant donnée une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres (réels ou complexes) indexée par un ensemble fini I, on note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ leur somme et $\prod\limits_{i\in I} a_i$ leur produit.

En particulier si $I = [\![n,p]\!]$ avec n,p des entiers, on note

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant n} a_i = \sum_{i=n}^{p} a_i = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_p \quad \text{et} \quad \prod_{p\leqslant i\leqslant n} a_i = \prod_{i=n}^{p} a_i = a_n \times a_{n+1} \times \ldots \times a_p.$$

Parfois l'ensemble d'indices sera noté, par souci de concision ou de clarté, de manière descriptive plutôt qu'ensembliste. Ainsi,

$$\sum_{i\in[\![0,n]\!]\cap 2\mathbb{Z}} a_i = \sum_{\substack{i\in[\![0,n]\!]\\ i \text{ pair}}} a_i = \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ pair}}}^{n} a_i = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots,$$

Proposition A3.1

Soient I un ensemble fini et $(a_i)_i \in I$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres complexes. Soit λ une constante. On a

$$\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i, \qquad \prod_{i\in I} a_i^\lambda = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^\lambda,$$

$$\sum_{i\in I} a_i + b_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i, \qquad \prod_{i\in I} a_i b_i = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in I} b_i,$$

$$\sum_{i\in I} \lambda = p\lambda, \qquad \prod_{i\in I} \lambda = \lambda^p,$$

où p est le nombre d'éléments de I.
Soit J et K deux parties disjointes de I (*i.e.* $J \cap K = \emptyset$). On a

$$\sum_{i\in J\cup K} a_i = \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in K} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i\in J\cup K} a_i = \left(\prod_{i\in J} a_i\right)\left(\prod_{i\in K} a_i\right).$$

Corollaire A3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres réels ou complexes, et $1 \leqslant m \leqslant n$ un entier.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i$$

Remarque. Par convention, une somme vide vaut 0 et un produit vide vaut 1.

1.2 Sommes et méthodes usuelles

Proposition A3.3 (Changement d'indice)

Par translation : soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres et $n, p \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{i=p+1}^{p+n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{p+k} \quad \text{et} \quad \prod_{i=p+1}^{p+n} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_{p+k}.$$

Par changement d'ordre : soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_{n+1-k},$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \quad \text{et} \quad \prod_{i=0}^{n} a_i = \prod_{k=0}^{n} a_{n-k}.$$

Théorème A3.4 (Somme télescopique)

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres et $p \leqslant n$ deux entiers. On a

$$\sum_{i=p}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_p$$

Théorème A3.5 (Progression arithmétique)

Soient $(u_k)_k$ une suite arithmétique de raison r et $m, n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}.$$

Théorème A3.6 (Progression géométrique)

Soient $(v_k)_k$ une suite géométrique de raison q et $m, n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} v_k = \frac{v_m - v_{n+1}}{1 - q} = v_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

Proposition A3.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Théorème A3.8 (Formule de Bernoulli)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

2 Coefficients binomiaux

Définition A3.9

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** de n le nombre entier noté $n!$ et défini par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Remarques.

- La convention $0! = 1$ est cohérente avec celle du produit vide.
- On peut aussi la définir par récurrence par $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Définition A3.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $p \in [\![0, n]\!]$, on définit le **coefficient binomial** « p parmi n » par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Remarque. On peut les définir plus généralement en posant $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Proposition A3.11

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. $\binom{n}{1} = n$.
3. Symétrie : $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
4. Formule de Pascal :

$$\forall p < n-1, \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Proposition A3.12 (Formule du binôme)

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3 Sommes doubles

Notations. Étant donnés deux ensembles finis I et J, une famille d'éléments indexée par I et J se note $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ ou $(a_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$. La somme de ces éléments est notée

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} a_{ij}.$$

Remarque. Dans le cas particulier où $I = [\![m,n]\!]$ et $J = [\![p,q]\!]$ sont des ensembles d'entiers successifs, on note la somme

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij}.$$

Théorème A3.13 (Indexation sur un rectangle)

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}.$$

Théorème A3.14 (Indexation sur un triangle)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ une famille de nombres complexes indexée par le triangle $\{(i,j) \,|\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$. Alors

$$\sum_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n} \sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$

Méthodes

- Démonstration par récurrence.
- Calculer une somme ou un produit télescopique.
- Translater ou inverser une indexation.
- Séparation d'une somme selon une partition :
  - ➢ extraire un terme,
  - ➢ séparer les termes pairs et impairs.
- Interversion de sommes/produits doubles.

Chapitre A4

Nombres complexes

Objectifs

- Nombres complexes, formes algébrique et trigonométrique.
- Résolution d'équations.
- Représentation de notions et transformations géométriques.

1 Forme algébrique

1.1 Introduction

Définition A4.1

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés **nombres complexes** et qui vérifie les propositions suivantes :

(i) $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ et les opérations d'addition et de multiplication y sont préservées.

(ii) $\mathbb{C}$ contient un élément i dont le carré vaut -1.

(iii) Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$.

Définition A4.2

Étant donné un nombre complexe z, l'écriture $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ s'appelle **forme algébrique** de z. x s'appelle **partie réelle** de z et y est sa **partie imaginaire**, notées respectivement $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
Les nombres complexes de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$ sont appelés **imaginaires purs**. On note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.

1.2 Calculs, conjugaison, module

Proposition A4.3

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Alors

- $z = z' \Leftrightarrow (a = a'$ et $b = b')$,
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$,
- $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

Définition A4.4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z le nombre $\overline{z} = a - ib$.

Proposition A4.5

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\overline{z}} = z$.

Étant donnés deux nombres complexes z et z', on a

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$,

Proposition A4.6

- On peut exprimer les parties réelle et imaginaire de z par :

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

- Cela a pour conséquence que
  - ➢ z est réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$,
  - ➢ z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$,

Définition A4.7

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **module** de z le nombre *réel positif*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposition A4.8

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \in \mathbb{R}_+$. Et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z||z'|$,

Théorème A4.9 (Inégalité triangulaire)

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

(i) $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$,

(ii) $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z' = \lambda z$.

Proposition A4.10

Pour tout nombre complexe z, on a $z\overline{z} = |z|^2$.

Utilisation. Pour exprimer un nombre sous forme algébrique, il faut commencer par se débarrasser des imaginaires au dénominateur en multipliant par le conjugué :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Proposition A4.11

Tout nombre complexe non nul possède un inverse : si $z = a + ib \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Remarque. Une formule souvent utile : $\dfrac{1}{i} = -i$.

1.3 Interprétation géométrique

Définition A4.12

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. À tout complexe $z = x + iy$, on peut associer un point du plan ayant pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, ainsi qu'un vecteur du plan, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Proposition A4.13

- Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\lambda\overrightarrow{u}$ ont pour affixes respectives $z + z'$ et λu.
- Le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.

Remarque. La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ traduit la relation $z_C - z_A = (z_C - z_B) + (z_B - z_A)$.

Proposition A4.14

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si M est le point d'affixe z, alors $|z| = OM$.
- Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'affixe z, alors $|z| = \|\overrightarrow{u}\|$.
- Si A et B sont deux points du plan, alors $AB = |z_B - z_A|$.

1.4 Résolution d'équations du second degré

Proposition A4.15

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées distinctes et opposées.

Théorème A4.16

Étant donnés trois nombres complexes $a \neq 0$, b et c, on étudie l'équation

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{A4.1}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

(i) Si $\Delta = 0$, l'équation (A4.1) a une unique solution : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

(ii) Si $\Delta \neq 0$, on appelle δ une racine carrée de Δ. Alors l'équation (A4.1) a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Remarque. Si a, b et c sont réels, Δ l'est aussi. L'équation (A4.1) a alors des solutions réelles si $\Delta \geqslant 0$ et complexes conjuguées si $\Delta < 0$.

Proposition A4.17

Avec les notations ci-dessus (z_1 et z_2 éventuellement confondues),

- on a la factorisation
$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$
- on a les relations
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

2.1 Exponentielle complexe

Définition A4.18

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, appelé **cercle unité** ou **cercle trigonométrique** :
$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Proposition A4.19

- $1 \in \mathbb{U}$,
- Si $z, z' \in \mathbb{U}$, alors $zz' \in \mathbb{U}$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}$.

Définition A4.20

Soit $z \in \mathbb{U}$ et M le point d'affixe z dans le plan complexe.

— L'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$ s'appelle **un argument** de z, noté $\mathrm{Arg}(z)$.

— Si θ désigne un argument de z, alors on note $e^{i\theta} = z$.

— Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit le **cosinus** et le **sinus** de θ par
$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}).$$

Définition A4.21

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'**exponentielle complexe** de z par
$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Proposition A4.22

- Étant donnés deux nombres complexes z et z', on a $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.
- Étant donnés θ et μ deux réels, on a
  (i) $e^{i\theta} = e^{i\mu}$ si et seulement si $\theta = \mu \bmod 2\pi$,
  (ii) $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Proposition A4.23 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition A4.24 (Formule de De Moivre)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2.2 Argument et forme trigonométrique

Théorème et définition A4.25

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de z. Et alors
(i) ρ est unique : c'est le module de z,
(ii) θ est un argument de z.

Proposition A4.26

Étant donnés deux nombres complexes non nuls z et z', on a (à 2π près) les égalités suivantes :

- $\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$,
- $\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z'$ et $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$,
- $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z'$.

2.3 Interprétation géométrique

Proposition A4.27

Soit $z \in \mathbb{C}$.

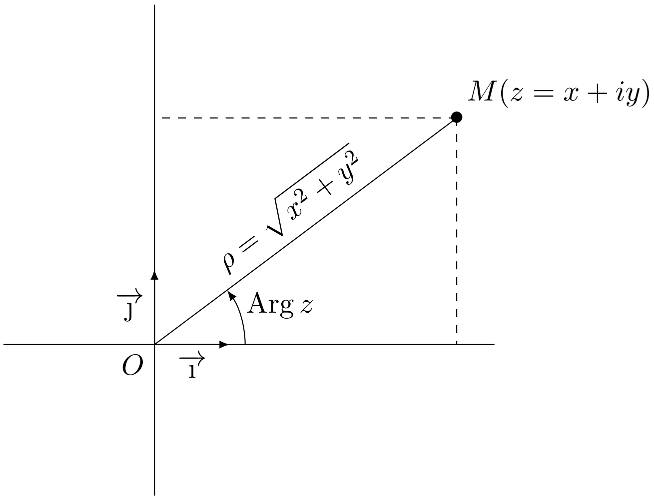
- Si M est le point d'affixe z, alors $\operatorname{Arg} z$ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
- Si $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe z, alors $\operatorname{Arg} z$ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \vec{u})$.
- Si A et B sont deux points du plan, alors $\operatorname{Arg}(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB})$.
- Si A, B C et D sont deux points du plan, alors $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Proposition A4.28

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes z et z'. Alors

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z}{z'}$ est réel. De plus, ils sont de même sens si et seulement si ce quotient est positif.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z}{z'}$ est imaginaire pur.

Géométrie	Complexes (algébrique)	Complexes (trigonométrique)
Plan	Nombres complexes	
Point M	Affixe $z = x + iy$	Affixe $z = \rho e^{i\theta}$
Abscisse x	Partie réelle	
Ordonnée y	Partie imaginaire	
Axe (Ox)	Nombres réels	
Axe (Oy)	Imaginaires purs	
Symétrique / (Ox)	Complexe conjugué	
$OM = \lVert\overrightarrow{OM}\rVert$	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$\lvert z\rvert$
AB		$\lvert z_B - z_A\rvert$
Cercle unité	$x^2 + y^2 = 1$	$\lvert z\rvert = 1$
$(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$		$\operatorname{Arg}(z)$
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$		$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$



2.4 Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

Définition A4.29

Dans $\mathbb{C}$, on appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

Notation. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Théorème A4.30 (expression des racines de l'unité)

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est fini, comporte exactement n éléments et

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{k}{n}2\pi},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Remarque. En notant $\omega = e^{2i\pi/n}$,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Proposition A4.31

Pour tout $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Proposition A4.32

Tout nombre complexe non nul a possède exactement n racines n-ièmes. Si $a = \rho e^{i\theta}$, ce sont les nombres

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

3 Transformations du plan

3.1 Généralités et transformations usuelles

On notera $\mathscr{P}$ le plan complexe.
Étant donnée une application

$$F: \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array},$$

on appelle **représentation (analytique) complexe** de F l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de son image M' par F. On note en général $z' = f(z)$.

Proposition A4.33

(i) La représentation complexe de la symétrie orthogonale d'axe (Ox) (respectivement (Oy)) est

$$z' = \overline{z} \quad (\text{resp. } z' = -\overline{z}).$$

(ii) Étant donné un $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathscr{P}$ d'affixe b, la représentation complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est

$$z' = z + b.$$

(iii) Étant donnés $\lambda \in \mathbb{R}$ et Ω un point de $\mathscr{P}$ d'affixe ω, la représentation complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est

$$z' - \omega = \lambda(z - \omega), \text{ i.e. : } z' = \omega + \lambda(z - \omega).$$

(iv) Étant donnés un angle $\theta \in \mathbb{R}$ et Ω un point de $\mathscr{P}$ d'affixe ω, la représentation complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega), \text{ i.e. : } z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Remarques.

- On peut aussi écrire la représentation complexe d'une homothétie sous la forme

$$z' = \lambda z + (1 - \lambda)\omega,$$

  et celle d'une rotation sous la forme

$$z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

- En particulier une homothétie de centre O s'écrit $z' = \lambda z$ et une rotation de centre O s'écrit $z' = e^{i\theta} z$.

3.2 Similitudes

Définition A4.34

On appelle **similitude directe** une application $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$ qui a une représentation complexe de la forme

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Proposition A4.35

- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- Étant donnés quatre points M_1, M_2, M_1' et M_2' du plan tels que $M_1 \neq M_2$, il existe une unique similitude directe S telle que $S(M_1) = M_1'$ et $S(M_2) = M_2'$

Proposition A4.36

Soit S la similitude directe de représentation complexe $z' = az + b$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe b.

- Si $a = 1$, alors S est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
- Si $a \neq 1$, alors S possède un unique point fixe Ω. On peut alors écrire

$$S = h \circ r = r \circ h$$

  avec h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = |a|$ et r la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \arg a[2\pi]$.

Méthodes

- Passer d'une forme à une autre pour un nombre complexe.
- Interpréter géométriquement le module et l'argument d'un complexe.
- Utiliser l'exponentielle complexe pour des problèmes de trigonométrie.
- Résoudre des équations
  - ➢ à l'aide de la conjugaison,
  - ➢ détermination de racines carrées,
  - ➢ équations du second degré,
  - ➢ à l'aide des racines n-ièmes de l'unité.
- Associer une similitude directe à sa représentation complexe.

Deuxième partie

De analysi

Chapitre B1

Études de fonctions

Objectifs

- Notion de fonction et notions connexes.
- Plan d'étude d'une fonction et réalisation technique.
- Notions de bijection et de bijection réciproque.
- Propriétés calculatoires des fonctions usuelles (exponentielle, logarithme).
- Trigonométrie hyperbolique.

Remarques.

- Le plan de ce cours constitue un plan d'étude de fonction.
- Les fonctions données en exemples (➢) au fil du chapitre sont toutes des fonctions usuelles. Si elles illustrent ponctuellement l'une ou l'autre des notions abordées, c'est bien leur étude complète qui doit être connue.

1 Notion de fonction

1.1 Définitions

Définition B1.1

Une **fonction réelle** d'une variable réelle est la donnée d'un sous-ensemble (non vide) D de $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in D$ d'une valeur réelle appelée **image** de x par la fonction.

Notations. Si on appelle f cette fonction, on écrit $f : D \to \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in D$, on note $f(x)$ l'image de x par f.

Définition B1.2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. D est appelé **ensemble de définition de** f.
Soit $x \in D$ et $y = f(x)$; on dit que x est un **antécédent** de y par f.
Dans le plan muni d'un repère, on appelle **graphe** de f la partie formée par tous les points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, dont l'équation cartésienne est $y = f(x)$.

➢ Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction puissance $x \mapsto x^n = \prod_{i=1}^{n} x$.

➢ Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $a^2 = x$. On le note $\sqrt{x}$ et on définit ainsi la fonction **racine carrée** : $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Définition B1.3

Soit E et F deux ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction.

- On appelle les ensembles E et F respectivement la **source** et le **but** de cette fonction.
- L'**image** (ou **ensemble image**) de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ est

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

➢ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ou $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

Définition B1.4

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- **majorée** lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D},\ f(x) \leqslant M$ (un tel M est **un majorant** de f),
- **minorée** lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D},\ f(x) \geqslant m$ (un tel m est **un minorant** de f),
- **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.

Proposition B1.5

La fonction f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) si et seulement si $\mathrm{Im}(f)$ est une partie majorée (resp. minorée, resp. bornée) de $\mathbb{R}$.

➢ sin, cos.

1.2 Opérations

Définition B1.6

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. Alors on peut définir

- la **somme** $f+g$ par $\begin{array}{rcl} f+g : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$,
- le **produit** $f \times g$ par $\begin{array}{rcl} f \times g : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \times g(x) \end{array}$.

De plus, si $\forall x \in D$, $g(x) \neq 0$, alors on peut définir

- l'**inverse** $\dfrac{1}{g}$ par $\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{g} : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{g(x)} \end{array}$,
- le **quotient** $\dfrac{f}{g}$ par $\begin{array}{rcl} \dfrac{f}{g} : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$.

➢ polynômes.

➢ $x \mapsto x^{3/2}$.

➢ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

➢ $\log_2$, $\log_{10}$.

Définition B1.7

On définit la fonction **logarithme décimal** par $\log_{10} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ et la fonction **logarithme en base** 2 par $\log_2 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Définition B1.8

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$. Si pour tout $x \in D$, $f(x) \in D'$, alors on peut définir la **fonction composée** de f par g, notée $g \circ f$, par : $\begin{array}{rcl} g \circ f : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$.

➢ $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition B1.9

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la **fonction puissance** α par

$$p_\alpha : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) \end{array}.$$

1.3 Réduction de l'intervalle d'étude

Définition B1.10

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de D. On définit la **restriction** de f à A, notée $f|_A$, par
$f|_A : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$

Définition B1.11

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est **périodique** lorsqu'il existe $T > 0$ (**une période**) tel que pour tout $x \in D$,

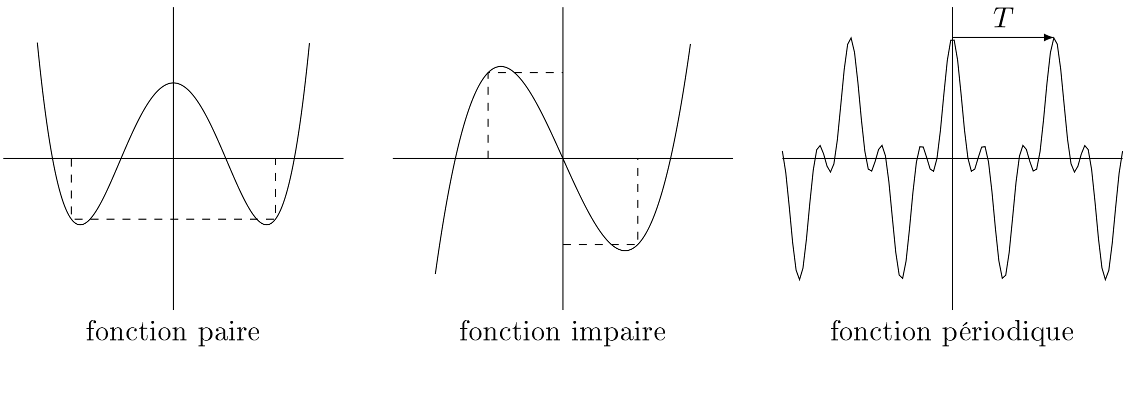
$$x + T \in D \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

Si elle existe, la plus petite période strictement positive de f s'appelle **la période** de f.

Définition B1.12

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est

- **paire** lorsque $\forall x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
- **impaire** lorsque $\forall x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.



fonction paire fonction impaire fonction périodique

➢ sin, cos.

➢ sh, ch.

Définition B1.13

On appelle **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\mathrm{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Proposition B1.14

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(i) Si f est paire, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(ii) Si f est impaire, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(iii) Si f est T-périodique, alors le graphe de f est invariant par la translation de vecteur $(T, 0)$.

(iv) Le graphe de $x \mapsto f(x-a)$ est l'image de celui de f par la translation de vecteur $(a, 0)$.

(v) Le graphe de $x \mapsto f(x) + b$ est l'image de celui de f par la translation de vecteur $(0, b)$.

(vi) Le graphe de $x \mapsto f(x-a) + b$ est l'image de celui de f par la translation de vecteur (a, b).

Dém. B1.14

(i) Pour tout x, le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-x$ est de coordonnées $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$, symétrique par rapport à l'axe du point d'abscisse x : $(x, f(x))$.

(ii) Même raisonnement.

(iii) Pour tout x, le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x + T$ est de coordonnées $(x+T, f(x+T)) = (x+T, f(x))$, image du point $(x, f(x))$ par la translation annoncée.

(iv) Soit $g : x \mapsto f(x-a)$. Pour tout x, le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$ est $M(x, f(x))$. Le point d'abscisse $x + a$ de $\mathscr{C}_g$ est $M'(x+a, f(x))$ car $g(x+a) = f(x)$. Et M' est bien l'image de M par la translation annoncée.

(v) et suivantes : même raisonnement

2 Limites

2.1 Continuité

On définira dans un chapitre ultérieur la notion de limite de manière précise. Pour l'heure, on s'appuie sur la notion que vous en avez acquise au lycée.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D$ ou au bord de D. Si elle existe, la limite de f en a (ou limite de $f(x)$ quand x tend vers a) est la valeur dont s'approche $f(x)$ quand x s'approche de a.

Notations. Si f admet une limite ℓ en a, on note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Et cette valeur ℓ est notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Définition B1.15

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D$. On dit que f est **continue en** a lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

➢ $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en a si $a \in \mathbb{Z}$.

2.2 Limites usuelles

Fonction	Continuité	$\lim\limits_{x \to -\infty}$	$\lim\limits_{x \to 0^-}$	$\lim\limits_{x \to 0^+}$	$\lim\limits_{x \to +\infty}$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, pair	$\mathbb{R}$	$+\infty$			$+\infty$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ impair	$\mathbb{R}$	$-\infty$			$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ pair	$\mathbb{R}^*$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	0^+
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ impair	$\mathbb{R}^*$	0^-	$-\infty$	$+\infty$	0^+
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$			0^+	$+\infty$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	0^+			$+\infty$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$			$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$-\infty$			$+\infty$
$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$+\infty$			$+\infty$
sin ou cos	$\mathbb{R}$	NON			NON

La fonction tangente est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Elle est π-périodique et on a : $\tan(x) \xrightarrow[x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+]{} -\infty$ et $\tan(x) \xrightarrow[x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} +\infty$.

2.3 Asymptotes

Définition B1.16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I$ une extrémité de I. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale** en x_0 lorsque f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en x_0. La droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote** à la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote oblique** si $a \neq 0$ et une **asymptote horizontale** si $a = 0$.

Remarque. Bien sûr la définition d'asymptote oblique ou horizontale suppose que I soit non borné.

➢ tan

➢ th

Définition B1.17

On appelle **tangente hyperbolique** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

2.4 Opérations

Théorème B1.18 (Opérations algébriques)

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un élément de I ou au bord de celui-ci. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$. Alors

(i) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$,

(ii) $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1\ell_2$,

(iii) avec $\ell_1 \neq 0$, $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1/\ell_1$,

(iv) si $\ell_1 = 0^+$, alors $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ et si $\ell_1 = 0^-$, alors $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$

Remarque. Ces opérations se font aussi dans le cas de limites infinies avec les règles de calcul suivantes.

$\ell_2 \backslash \ell_1$	$-\infty$	$\in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I
$\in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	F.I	$+\infty$	$+\infty$

Somme de limites.

$\ell_2 \backslash \ell_1$	$-\infty$	$\in \mathbb{R}_-$	0	$\in \mathbb{R}_+$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$	$-\infty$
$\in \mathbb{R}_-$	$+\infty$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$-\infty$
0	F.I	0	0	0	F.I
$\in \mathbb{R}_+$	$-\infty$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

Produit de limites.

Théorème B1.19 (Composition)

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x\to b]{} \ell$, alors $(g\circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Théorème B1.20 (Comparaison, encadrement, gendarmes)

Soit f, g et h trois fonctions réelles définies sur I et a un élément ou un bord de I.

(i) Si $\begin{cases} \forall x\in I,\ g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{cases}$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(ii) Si $\begin{cases} \forall x\in I,\ g(x)\leqslant f(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

2.5 Croissances comparées

Proposition B1.21

(i) On a les limites en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0.$$

(ii) On a la limite en 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

Proposition B1.22

Soit $a > 0$ et $b > 0$.

(i) On a les limites en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^a e^{-bx} = 0.$$

(ii) On a la limite en 0^+ :

$$\lim_{x \to 0^+} x^a (\ln x)^b = 0.$$

3 Variations

3.1 Définitions

Définition B1.23

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- **croissante** lorsque $\forall a, b \in I,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$;
- **décroissante** lorsque $\forall a, b \in I,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b))$;
- **strictement croissante** lorsque $\forall a, b \in I,\ (a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$;
- **strictement décroissante** lorsque $\forall a, b \in I,\ (a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$;

➢ Fonction affine : $x \mapsto ax + b$.

Remarque. Cet énoncé concerne bien les fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Cela n'empêche pas d'étudier une fonction définie sur un ensemble de définition D plus général, par exemple $\mathbb{R}^*$. Il suffit de scinder l'étude en deux temps : sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

3.2 Dérivabilité

Définition B1.24

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable en** $a \in I$ lorsque $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$.

Proposition B1.25

Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors elle est continue en a.

Proposition B1.26

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors la tangente en a à $\mathscr{C}_f$ a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Dém. B1.26

La tangente à la courbe de f en a est la droite passant par le point $(a, f(a))$ et de pente $f'(a)$ (ceci peut être justifié topologiquement en voyant la tangente comme limite de cordes mais ces considérations dépassent le cadre de ce cours).
Ceci étant établi, un autre point (x, y) du plan (avec $x \neq a$) appartient à cette droite si et seulement si $\dfrac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$, ce qui donne exactement l'équation attendue.

Définition B1.27

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point $a \in I$. Dans ce cas, on définit la **fonction dérivée** de f, notée f' par

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

➢ $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

3.3 Dérivées usuelles

$f(x)$	Dérivabilité	$f'(x)$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
x^a, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	ax^{a-1}
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$

$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Arccos}(x)$	$]-1,1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

3.4 Opérations

Proposition B1.28

Soient f, g deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $f+g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$,

(iii) λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$,

(iv) si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$,

Dém. B1.28

On raisonne sur le taux d'accroissement en un point $a \in I$.

(i) $\forall x \in I \setminus \{a\}$, $\dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} + \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) + g'(a)$.

(ii) $\forall x \in I \setminus \{a\}$,
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) \\ &\xrightarrow[x\to a]{} f(a)g'(a) + f'(a)g(a)\end{aligned}$$
car f est dérivable donc continue en a, d'où $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

(iii) Facile.

(iv) Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $\dfrac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \dfrac{1}{g(x)g(a)} \dfrac{g(a)-g(x)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{g(a)^2}(-g'(a))$
car g est dérivable donc continue en a, d'où $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} g(a)$.

Puis on applique la formule du produit à $f \times \dfrac{1}{g}$.

➢ tan.

Proposition B1.29 (Composée)

Étant données deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Dém. B1.29

Pour tous $a \in I$ et $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} &= \frac{(g(f(x)) - (g(f(a))}{x - a} \\
&= \frac{(g(f(x)) - (g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&\underset{x \to a}{\longrightarrow} g'(f(a))f'(a) \text{ car } f \text{ est continue en } a \text{ donc } f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a).
\end{aligned}$$

3.5 Lien dérivation/variations

Théorème B1.30

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

(i) f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).

(ii) f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

(iii) Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Dém. B1.30

Admis pour l'instant : conséquence du théorème des accroissements finis.

➢ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$).

Proposition B1.31

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et a un point intérieur à I. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque. Attention, ça ne marche que dans un sens : les éventuels extrema sont aux points d'annulation de la dérivée. Lorsqu'on connaît un point d'annulation de f', seule une étude complémentaire (par exemple examiner les variations au voisinage de ce point) permet de savoir si nous avons affaire à un minimum, à un maximum local ou à une autre situation.

3.6 Équations différentielles linéaires

➢ cos, sin.

➢ exp.

Théorème et définition B1.32

Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, notée exp et appelée **exponentielle**, telle que

$$\begin{cases} \exp(0) = 1, \\ \exp' = \exp\,. \end{cases}$$

Remarque. Cette définition traduit ce que l'on appelle couramment une « croissance exponentielle ».

Dém. B1.32

On admet l'existence d'une telle fonction (conséquences de théorèmes d'analyse sur les équations différentielles) et on en montre l'unicité.

- Montrons qu'une telle fonction ne s'annule pas.
  Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f' = f \end{cases}$ et posons $h : x \mapsto f(x)f(-x)$.
  h est dérivable comme produit de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
  $h'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(-x)f(x) = 0$.
  h est donc constante égale à sa valeur en 0, soit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(0) = 1$. Donc $f(x)$ n'est jamais nul.
- Montrons maintenant l'unicité à proprement parler.
  Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f' = f \end{cases}$ et $\begin{cases} g(0) = 1, \\ g' = g \end{cases}$.
  On pose $q : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ car g ne s'annule pas.
  Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $q'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0$.
  q est donc constante égale à $q(0) = 1$.
  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, c'est-à-dire $f(x) = g(x)$.
  On a donc montré que $f = g$.

Proposition B1.33

(i) Équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

(iii) exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Dém. B1.33

(i) Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$ (on a montré que $\exp(y) \neq 0$).
On constate que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.
De plus $f(0) = 1$. Donc par unicité, $f = \exp$.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = f(x)$, soit $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

(ii) On a déjà montré que exp ne s'annule pas.
La formule précédente nous donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0.$$

(iii) Conséquence directe du signe de exp, qui n'est autre que $\exp'$.

(iv)
- On étudie $g : x \mapsto \exp(x) - x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout x, $g'(x) = \exp(x) - 1$.
  Or exp est strictement croissante et vaut 1 en 0. g' est donc positive sur $\mathbb{R}_+$, négative sur $\mathbb{R}_-$. Et les variations qui en découlent indiquent un maximum en 0 pour la fonction g. Comme $g(0) = 0$, $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $\exp(x) \geqslant x$ et par comparaison de limites, on obtient : $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
- L'équation fonctionnelle donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x)$.
  D'où $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
  D'où $\exp(-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

Notation. On pose $e = \exp(1)$ et on note $e^x = \exp(x)$.

Remarque. L'équation fonctionnelle nous permet d'obtenir les règles de calcul pratique suivantes : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0$, on a $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$ et $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

4 Bijection réciproque

4.1 Définition

Définition B1.34

Soit $f : D \to D'$. On dit que f est **bijective** (f est une **bijection**) lorsque

$$\forall y \in D', \exists! x \in D, y = f(x),$$

i.e. lorsque tout élément de D' admet un unique antécédent par f.
Dans ce cas on peut définir la **bijection réciproque** de f, notée $f^{-1} : D' \to D$, qui à tout élément de J associe son unique antécédent par f.

Proposition B1.35

Soit $f : D \to D'$ une fonction bijective. Alors

- $\forall x \in D$, $f^{-1}(f(x)) = x$.
- $\forall x \in D'$, $f(f^{-1}(x)) = x$.

Proposition B1.36

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone réalise une bijection de I dans son ensemble image.

Remarque. Attention, pour parler de bijection, il faut bien restreindre l'ensemble d'arrivée de f à son ensemble image, c'est-à-dire $\{f(x) \mid x \in I\}$, l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ effectivement atteints par f.

4.2 Dérivation

Proposition B1.37 (Dérivation)

Soit $f : I \to J$ une fonction admettant une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$.

- Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a) \in J$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

- Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.
- Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Remarque. Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. En particulier les tangentes aux deux courbes en des points qui se correspondent ont des pentes inverses l'une de l'autre.

4.3 Exemples

Définition B1.38

La fonction **logarithme népérien**, définie sur $]0, +\infty[$ et notée ln, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Proposition B1.39

- La fonction ln est strictement croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$
- Limites : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Équation fonctionnelle : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Dém. B1.39

- Étant continnue et strictement croissante, $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas, donc sa bijection réciproque, $\ln$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'exprime : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp'(\ln(x))} = \dfrac{1}{\exp(\ln x)} = \dfrac{1}{x}$. Les variations de $\ln$ découlent du signe de cette expression sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les limites se déduisent de la symétrie entre les courbes représentatives de $\exp$ et $\ln$.
- On $\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = xy$.
D'où, en composant par $\ln$, $\ln x + \ln y = \ln(xy)$.

Définition B1.40

La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante. On appelle **arc sinus** son application réciproque $\sin^{-1}$ définie sur $[-1, 1]$ et notée Arcsin.

Proposition B1.41

(i) La fonction Arcsin est continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$.

(ii) La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Définition B1.42

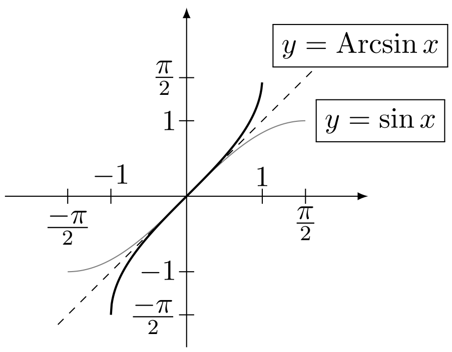
La restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ est continue et strictement décroissante. On appelle **arc cosinus** son application réciproque $\cos^{-1}$ définie sur $[-1, 1]$ et notée Arccos.

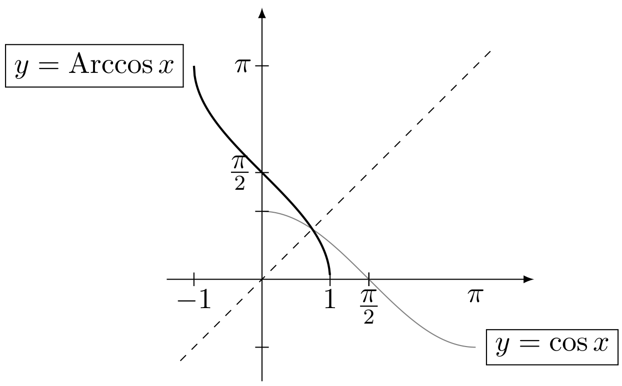
Proposition B1.43

(i) La fonction Arccos est continue, strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

(ii) La fonction Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$





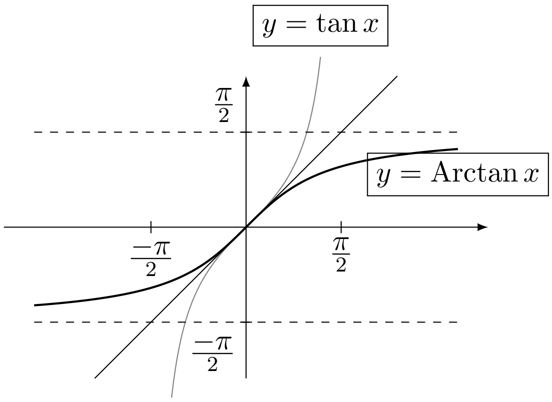
Définition B1.44

La restriction de la fonction tangente à $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante. On appelle **arc tangente** son application réciproque $\tan^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et notée Arctan.

Proposition B1.45

La fonction Arctan est continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



Méthodes

- Lever une indétermination dans un calcul de limite
  - ➢ par factorisation,
  - ➢ par croissances comparées,
  - ➢ en reconnaissant un taux d'accroissement.
- Étude des variations d'une fonction.
- Déterminer le signe d'une fonction
  - ➢ par résolution directe,
  - ➢ par l'étude de ses variations.
- Repérer une asymptote verticale, horizontale ou oblique.
- Déterminer la dérivabilité et la dérivée d'une bijection réciproque.
- Déterminer l'unicité de la solution ou le nombre de solutions d'une équation.

Chapitre B2

Nombres réels et suites numériques

Objectifs

- Définition d'une suite.
- Expression des suites usuelles.
- Appréhender la notion de borne supérieure ou inférieure, l'identifier dans des cas simples.
- Notion de limite d'une suite.
- Plan et méthodes pour l'étude d'une suite.

Notation. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Suites numériques

1.1 Généralités

Définition B2.1

On appelle **suite** à valeurs dans $\mathbb{K}$ une famille de nombre réels ou complexes indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}.$$

On note alors $u_n = u(n)$, appelé **terme général** de la suite.

Notations. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et une suite u sera le plus souvent définie par son terme général et notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Remarque. Une suite peut être simplement définie à partir d'un certain rang (àpcr) n_0. On la note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Définition B2.2

Étant données deux suites (u_n) et (v_n) et un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ les opérations de **somme**, **produit** et **multiplication par un scalaire** par

- $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$,
- $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$,
- $(u_n) \times (v_n) = (u_n v_n)$.

Définition B2.3 (Ordre)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est

(i) **majorée** lorsque l'ensemble de ses termes est majoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M;$$

(ii) **minorée** lorsque l'ensemble de ses termes est minoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n;$$

(iii) **bornée** lorsqu'elle est minorée et majorée.

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est **bornée** lorsque $(|u_n|)$ est majorée.

Définition B2.4 (Monotonie)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est

(i) **croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1};$$

(ii) **décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n;$$

(iii) **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

(iv) On dit que (u_n) est **strictement croissante**, **strictement décroissante** ou **strictement monotone** lorsque les inégalités ci-dessus sont strictes.

Remarque. On aura souvent simplement besoin de vérifier ces propriétés **à partir d'un certain rang**, c'est à dire que la propriété en question sera vraie pour tout $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite constante à partir d'un certain rang s'appelle une suite **stationnaire**.

1.2 Suites usuelles

Définition B2.5

Soit $r \in \mathbb{K}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison r lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition B2.6

Soit $r \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$,

(ii) $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Définition B2.7

Soit $q \in \mathbb{K}$. On dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** de raison q lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times q$.

Proposition B2.8

Soit $q \in \mathbb{K}^*$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$,

(ii) $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Définition B2.9

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe $a \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{K}^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode d'étude :

- Si $a = 1$, se ramener à l'étude d'une suite arithmétique.
- Si $a \neq 1$, trouver c tel que $c = ac + b$ (**point fixe** de la relation).

  Détail.

  $$\begin{aligned} c = ac + b \quad &\Leftrightarrow \quad c(1-a) = b \\ &\Leftrightarrow \quad c = \boxed{\frac{b}{1-a}} \end{aligned}$$

- $(w_n) = (u_n - c)$ est géométrique de raison a.

Détail.

Soit $w_n = u_n - c$ pour tout n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - c \\ &= au_n + b - c \\ &= au_n + b - (ac + b) \\ &= a(u_n - c) \\ &= \boxed{aw_n} \end{aligned}$$

- Exprimer w_n en fonction de n.

- En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Détail.

(w_n) est géométrique de raison a. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = a^n w_0$.
Donc $u_n - c = a^n(u_0 - c)$, soit $u_n = a^n(u_0 - c) + c$.
Finalement, $\boxed{u_n = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}}$.

1.3 Étude d'une suite récurrente linéaire à deux termes

Définition B2.10

(i) On dit (u_n) vérifie une **relation de récurrence linéaire à deux termes** (ou **d'ordre 2**) s'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a, c \neq 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

(ii) Dans ce cas, on appelle **équation caractéristique** l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Théorème B2.11

Avec les notations ci-deussus, soit (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée.

(i) Cas complexe.
- Si $\Delta > 0$, soit q_1 et q_2 ses deux solutions réelles.
  Alors $(u_n) \in \{(\lambda q_1^n + \mu q_2^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\Delta = 0$, soit q son unique solution réelle.
  Alors $(u_n) \in \{(\lambda q^n + \mu n q^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Cas réel.
- Si $\Delta > 0$, soit q_1 et q_2 ses deux solutions réelles.
  Alors $(u_n) \in \{(\lambda q_1^n + \mu q_2^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\Delta = 0$, soit q son unique solution réelle.
  Alors $(u_n) \in \{(\lambda q^n + \mu n q^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\Delta < 0$, soit $q_1 = \rho e^{i\theta}$ et $q_2 = \rho e^{-i\theta}$ ses deux solutions complexes conjuguées.
  Alors $(u_n) \in \{\rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)) \mid A, B \in \mathbb{R}\}$.

Méthode d'étude pour $\begin{cases} u_0, u_1 \text{ donnés} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \end{cases}$:

- Écrire et résoudre l'**équation caractéristique** : $ax^2 + bx + c = 0$.
- En fonction de Δ, donner les solutions générales (voir théorème ci-dessus).
- À l'aide de u_0 et u_1, trouver les deux constantes (via un système à deux équations).

Remarque.
- La relation $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ s'appelle **relation de récurrence linéaire d'ordre 2**.
- Si $a = 0$ ou $c = 0$, la suite (u_n) est simplement géométrique.
- Très souvent, on aura $a = 1$ et la relation sera donnée sous la forme $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$.

2 Bornes supérieure et inférieure

Définition B2.12 (Bornes supérieure et inférieure)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Sous réserve d'existence,

(i) on appelle **borne supérieure** de A le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A.

(ii) on appelle **borne inférieure** de A le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A.

Notations. On note $\sup A$ et $\inf A$ ces éléments.

Proposition B2.13

(i) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

(ii) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Proposition B2.14 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre

(i) $s = \sup A$;

(ii) s est un majorant de A et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $s - \varepsilon < a$.

(iii) s est un majorant de A et $\forall x < s$, $\exists a \in A$, $x < a$.

Remarque. De même on a équivalence entre

(i) $i = \inf A$;

(ii) i est un minorant de A et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b \in A$, $b < i + \varepsilon$.

(iii) i est un minorant de A et $\forall x > i$, $\exists b \in A$, $b < x$.

3 Convergence, divergence

3.1 Limites

Définition B2.15

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Si un tel ℓ existe, on dit que la suite est **convergente** et sinon on dit qu'elle est **divergente**.

Remarque. Variante réelle : une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux. Notamment, on peut interpréter $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$.

Définition B2.16

On dit qu'une suite réelle (u_n) **tend vers** $+\infty$ (et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A.$$

On dit qu'une suite réelle (u_n) **tend vers** $-\infty$ (et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A.$$

Remarque. On peut aussi donner la formulation suivante : (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

Théorème et définition B2.17 (Unicité de la limite)

Soit $\ell, \ell' \in \mathbb{K}$ et soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ et vers ℓ'. Alors $\ell = \ell'$. Ce nombre s'appelle alors **la limite** de la suite (u_n) et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Remarque. Même chose dans le cas réel d'une limite infinie, avec la notation $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou $-\infty$).

3.2 Premières propriétés

Proposition B2.18

La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Proposition B2.19

Toute suite convergente est bornée.

Remarque. Une suite qui tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) n'est pas majorée (resp. pas minorée). En particulier, elle diverge.

Proposition B2.20 (Compatibilité avec la relation d'ordre)

(i) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $a, b \in \mathbb{R}$. Si $u_n \in [a, b]$ àpcr, alors $\ell \in [a, b]$.

(ii) Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Si $u_n \leqslant v_n$ àpcr, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarque. Attention : les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Proposition B2.21

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

- Si $\ell \neq a$, alors $u_n \neq a$ àpcr.
- Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: si $\ell > 0$, alors $u_n \neq 0$ (et même $u_n > 0$ àpcr).

3.3 Opérations sur les limites

Lemme B2.22

Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 tend vers 0.

Proposition B2.23 (Somme, produit)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

(i) la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$;

(ii) la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

Proposition B2.24 (Inverse)

Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \neq 0$. Alors la suite $(1/u_n)$ est bien définie àpcr et converge vers $1/\ell$.

Proposition B2.25

— Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $|u_n|$ tend vers $+\infty$. Alors $(1/u_n)$ converge vers 0.

— Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $|u_n|$ tend vers 0. Alors $(1/u_n)$ diverge. De plus,

  ➢ si $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ àpcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$,

  ➢ si $u_n \in \mathbb{R}_-^*$ àpcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$,

Proposition B2.26

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.

Proposition B2.27 (Module)

Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Théorème B2.28 (Encadrement, gendarmes)

Soit $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose

➢ $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ àpcr,

➢ (u_n) et (w_n) convergent toutes deux vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors (v_n) converge également vers ℓ.

Remarque. Un cas particulier : Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $|u_n| \leqslant v_n$ àpcr et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3.4 Suites extraites

Définition B2.29

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (v_n) est une **suite extraite** ou une **sous-suite** de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Proposition B2.30

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Remarque. En particulier pour montrer qu'une suite bornée n'est pas convergente, il suffit de trouver deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes.

Proposition B2.31

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite $\ell \in \mathbb{K}$, alors (u_n) tend vers ℓ.

Théorème B2.32 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

3.5 Monotonie

Théorème B2.33 (Limite monotone)

(i) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante.
- Si (u_n) est majorée, alors elle converge vers $\ell = \sup\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

(ii) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
- Si (u_n) est minorée, alors elle converge vers $\ell = \inf\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Définition B2.34 (Suites adjacentes)

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si

(i) (u_n) est croissante,

(ii) (v_n) est décroissante,

(iii) $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème B2.35

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors (u_n) et (v_n) tendent vers la même limite ℓ qui, de plus, vérifie $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dém. B2.35

- $(v_n - u_n)$ est décroissante d'après les variations de (u_n) et (v_n).
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$ car $(v_n - u_n)$ décroît vers 0.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Ainsi (u_n) est majorée (par v_0) et (v_n) minorée (par u_0).
- (u_n) et (v_n) convergent. Soit ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
- $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' - \ell$ donc $\ell' - \ell' = 0$ par unicité de la limite.
- $\ell = \sup\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\} = \inf\{v_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

3.6 Traduction séquentielle de propriétés analytiques

Théorème B2.36 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes.

(i) X est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Théorème B2.37 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide et majorée de A. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes.

(i) $s = \sup(A)$.

(ii) s est un majorant de A et $\exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Théorème B2.38 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $a \in D$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes.

(i) f est continue en a.

(ii) Pour toute suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Méthodes

- Déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique en se ramenant à une suite géométrique.
- Déterminer l'expression d'une suite récurrente d'ordre 2 en passant par son expression caractéristique.
- Enlever une valeur absolue en distinguant les cas.
- Déterminer une borne supérieure ou inférieure.
- Déterminer la limite d'une suite
  - ➢ par calcul direct,
  - ➢ par croissances comparées,
  - ➢ par encadrement...
- Montrer la convergence d'une suite
  - ➢ en calculant sa limite (*cf. supra*),
  - ➢ par limite monotone.
- Montrer la divergence d'une suite
  - ➢ en calculant sa limite (*cf. supra*),
  - ➢ en étudiant des suites extraites.

Chapitre B3

Intégration et équations différentielles

Objectifs

- Notion d'intégrale, vision géométrique et vision calculatoire.
- Lien entre primitives et calcul d'intégrales.
- Calcul pratique d'intégrales.
- Structure des solution d'une équation différentielle.
- Résolution pratique des EDL usuelles.

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle véritable de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Primitives et intégrale

Définition B3.1

(i) Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On appelle **partie réelle** et **partie imaginaire** de f les applications $\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ et $\operatorname{Im} f : x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$.

(ii) On dit que f est **dérivable** en $x \in I$ si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont et on pose

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x).$$

Définition B3.2

Soit $f, F : I \to \mathbb{K}$. On dit que F est **une primitive** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I et que $F' = f$.

Théorème B3.3

(i) Toute fonction continue sur I admet une primitive.

(ii) Les primitives de la fonction nulle sont les fonctions constantes.

Proposition B3.4

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

(i) Si F est une primitive de f sur I, alors $G : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si et seulement si $G - F$ est constante.

(ii) Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Notation. Soit $a, b \in I$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et F une primitive de f. On note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Formules générales

Proposition B3.5 (Chasles)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a, b, c \in I$ et . Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition B3.6 (Linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues sur I dans $\mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition B3.7 (Positivité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$ et soit $a < b$ dans I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Corollaire B3.8 (Croissance)

Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$ et soit $a < b$ dans I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition B3.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et de signe constant et soit $a \neq b$ dans I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Théorème B3.10 (Inégalité triangulaire)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et soit $a, b \in I$.

(i) On a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a égalité si et seulement si f est de signe constant.

2.2 Techniques d'intégration

Définition B3.11

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

Théorème B3.12 (Intégration par parties)

Soient $u, v : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème B3.13

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ une fonction dont la dérivée est continue sur I. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\alpha, \beta \in J$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

3 Équations différentielles

3.1 Généralités

Définition B3.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle d'ordre** n une équation du type

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

où y est la fonction inconnue de la variable x et F est une fonction à $n+2$ variables $F : I \times \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$.
Une **solution sur** I de cette équation est une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$, n fois dérivable sur I, qui vérifie

$$\forall x \in I,\ F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

Résoudre ou **intégrer** cette équation différentielle sur I, c'est donner toutes ses solutions sur I.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les **courbes intégrales** de cette équation sont les courbes représentatives de ses solutions.

Définition B3.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire** une équation différentielle de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = b(x), \qquad (E)$$

où $a_0, \dots a_n$ et b sont des fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$.
On dit que l'équation est **normalisée** lorsque a_n est constante égale à 1.
On dit que l'équation est **à coefficients constants** lorsque les fonctions $a_0, \dots, a_n$ sont constantes.
L'équation **homogène** ou **sans second membre** associée à (E) est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0. \qquad (E_0)$$

Notation. On notera $\mathcal{S}_I$ les solutions sur I de l'équation (E) et $\mathcal{S}_{0,I}$ celles de l'équation (E_0).

Théorème B3.16 (Structure de $\mathcal{S}_{0,I}$)

(i) La fonction nulle est solution de (E_0)

(ii) Soit $f \in \mathcal{S}_{0,I}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f \in \mathcal{S}_{0,I}$.

(iii) Soit $f, g \in \mathcal{S}_{0,I}$. Alors $f + g \in \mathcal{S}_{0,I}$.

Théorème B3.17 (Structure de $\mathcal{S}_I$)

Soit f_P une solution de (E). Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable, on a

$$f \in \mathcal{S}_I \Leftrightarrow (f - f_P) \in \mathcal{S}_{0,I}.$$

Autrement dit :

$$\mathcal{S}_I = \{f_P + f_0 \mid f_0 \in \mathcal{S}_{0,I}\}.$$

Théorème B3.18 (Superposition des solutions)

Soit b_1, b_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Soit $f_1 : I \to \mathbb{K}$ une solution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = b_1(x)$.

Soit $f_2 : I \to \mathbb{K}$ une solution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = b_2(x)$.

Alors $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = \lambda b_1(x) + \mu b_2(x)$.

Proposition B3.19 (Caractérisation de l'exponentielle)

Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f : x \mapsto e^{ax}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et vérifiant $y(0) = 1$.

Définition et théorème B3.20

Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et (E_0) l'équation différentielle à coefficients constants $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$.
On appelle **équation caractéristique** associée l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{K}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0. \tag{E_c}$$

Soit $r \in \mathbb{K}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_0).

(ii) r est solution de (E_c).

3.2 Résolution d'une équation homogène

EDLH du 1$^{\text{er}}$ ordre

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et (E_0) l'équation linéaire homogène du premier ordre

$$y' + a(x)y = 0.$$

Théorème B3.21

Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

EDLH du 2$^{\text{e}}$ ordre

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ et (E_0) l'équation linéaire homogène du second ordre

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Soit (E_c) l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant.

Théorème B3.22 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

- Si $\Delta \neq 0$, soit r_1, r_2 les solutions de (E_c). Les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

- Si $\Delta = 0$, soit r la solutions de (E_c). Les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

Théorème B3.23 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

- Si $\Delta > 0$, soit r_1, r_2 les solutions réelles de (E_c). Les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $\Delta = 0$, soit r la solutions de (E_c). Les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $\Delta < 0$, soit r_1, r_2 les solutions complexes conjuguées de (E_c). En posant $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, les solutions de (E_0) sont

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 &= \{x \mapsto (\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))\, e^{\alpha x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \mapsto (A\cos(\beta x + \varphi))\, e^{\alpha x} \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

3.3 Recherche d'une solution particulière

Cas d'une EDL à coefficients constants

Recherche d'une solution particulière sous la forme du second membre.

Variation de la constante

Théorème B3.24

Soit a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et (E) l'équation linéaire homogène du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Soit C une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$. Alors $x \mapsto C(x)e^{-A(x)}$ est solution de (E).

3.4 Problème de Cauchy

Théorème B3.25

Soit a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

Théorème B3.26

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ continue. Étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Méthodes

- Comparaison d'intégrales.
- Calcul de primitive
  - ➢ en reconnaissant une dérivée usuelle,
  - ➢ par intégration par parties,
  - ➢ par changement de variable.
- Étudier une fonction définie par une intégrale.
- Résolution d'équations différentielles :
  - ➢ équations homogènes d'ordre 1 ou 2,
  - ➢ variation de la constante,
  - ➢ seconds membres usuels.

Chapitre B4

Continuité et dérivabilité

Objectifs

- Notions de limite et de continuité en un point, à droite, à gauche.
- Fonctions continues et prolongements par continuité.
- Approche locale de la dérivabilité.
- Étude globale des fonctions continues, dérivables.

1 Limites, continuité

Les notions de ce chapitre sont présentées pour une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Elles s'étendent (dans une mesure que l'on précisera) aux fonctions définies sur un domaine qui s'en rapproche ou s'y ramène simplement (par exemple $\mathbb{R}^*$ comme union de deux intervalles, *etc.*).
Dans toute la suite, on considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Notation. $\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On désigne par $\overline{I}$ l'intervalle I incluant ses bornes si elles sont finies. Par exemple $\overline{]0,1[} = [0,1]$.

1.1 Étude locale

Définition B4.1

Soit f une fonction définie sur I. Soit a un élément ou une extrémité de I et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** a et on note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ lorsque,

- pour $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

- pour $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$,

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[,\ f(x) > M,$$

- pour $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$,

$$\forall M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [A, +\infty[,\ f(x) > M,$$

- pour $a = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, A],\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Définition B4.2

Soit f définie sur I.

(i) Soit $a \in \overline{I}$. On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ **au voisinage de** a lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $I \cap]a-\eta, a+\eta[$.

(ii) Supposons que $+\infty$ est au bord de I. On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ **au voisinage de** $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur $I \cap [A, +\infty[$.

Remarques.

- Il existe bien sûr la même définition si l'on se place au voisinage de $-\infty$.
- On peut encore écrire cinq autres définitions de la limite dans les autres cas pour a et ℓ. Il est indispensable de savoir le faire. On peut aussi utiliser la notion de voisinage pour résumer la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ en une assertion :

pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que pour tout $x \in I \cap W$, $f(x) \in V$.

Proposition B4.3 (Unicité de la limite)

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Notation. On peut donc noter $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Dém. B4.3

Supposons $\ell_1 \neq \ell_2$. Alors il existe un voisinage V_1 de ℓ_1 et un voisinage V_2 de ℓ_2 disjoints (par exemple si ℓ_1 et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, on prend $V_1 =]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[$ et $V_2 =]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[$ avec $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2}$).
Par définition, il existe W_1 voisinage de a tel que pour tout $x \in I \cap W_1$, $f(x) \in V_1$.
Et aussi il existe W_2 voisinage de a tel que pour tout $x \in I \cap W_2$, $f(x) \in V_2$.
Mais $W_1 \cap W_2$ est un voisinage (non vide) de a. Or pour $x \in W_1 \cap W_2$, $f(x) \in V_1 \cap V_2$, ce qui est impossible car on les a choisis disjoints.

Définition B4.4

Soit f définie sur I et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

Remarque. On peut donc traduire cette définition en termes mathématiques : f est continue en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[, \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition B4.5 (À droite et à gauche)

Soit f définie sur I et a un élément ou une extrémité de I.

(i)
- Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f admet une **limite à droite** en a lorsque $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ admet une limite en a.
- Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f admet une **limite à gauche** en a lorsque $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet une limite en a.

(ii)
- Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f est **continue à droite** en a lorsque $f|_{I \cap [a, +\infty[}$ est continue en a.
- Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f est **continue à gauche** en a lorsque $f|_{I \cap]-\infty, a]}$ est continue en a.

Notations. On note $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell$ ou encore, si on a l'existence de la limite, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{a^+} f = \ell$.

Proposition B4.6

(i) f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à droite et à gauche en a et qu'elles sont égales.

(ii) f est continue en $a \in I$ si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

Théorème et définition B4.7

Soit $a \in I$ et f définie sur $I \setminus \{a\}$. Supposons que f admette une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a. Alors on peut définir la fonction

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases} \end{array} .$$

Cette fonction est continue en a et est appelée **prolongement par continuité** de f en a.

1.2 Opérations

Désormais f et g désignent deux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$. Les limites considérées s'entendent en un point de leur ensemble de définition ou au bord de ce dernier.

Proposition B4.8

(i) Si $f \underset{a}{\to} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a.

(ii) Si $f \underset{a}{\to} \ell > 0$, alors il existe $m > 0$ tel que $f > m$ au voisinage de a.

Dém. B4.8

(i) On applique la définition avec $\varepsilon = 1$. Ceci montre que f est bornée au voisinage de a par $\ell - 1$ et $\ell + 1$.

(ii) Si $\ell \in \mathbb{R}_+$, on applique la définition avec $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$. Ceci montre que $f(x) \geqslant \ell - \ell/2$ dans un voisinage de a, ce qui est un minorant m strictement positif.
Si $\ell = +\infty$, on applique la définition avec n'importe quel seuil strictement positif.

Théorème B4.9 (Opérations algébriques)

Soit f, g deux fonctions définies sur I et $a \in \overline{I}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$. Alors

(i) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$,

(ii) $(fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 \ell_2$,

(iii) $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |\ell_1|$.

(iv) avec $\ell_1 \neq 0$, $(1/f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1/\ell_1$

Dém. B4.9

Démonstration partielle de la première propriété dans le cas où $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$.

Soit V_1 voisinage de a tel que pour tout $x \in V_1$, $|f(x) - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|}$.
Soit V_2 voisinage de a tel que pour tout $x \in V_2$, $|g(x) - \ell_2| < \dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$.
Soit $V = V_1 \cap V_2$ voisinage de a. Alors pour tout $x \in V$,

$$|(\alpha f + \beta g)(x) - \alpha \ell_1 + \beta \ell_2| \leqslant |\alpha||f(x) - \ell_1| + |\beta||g(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème B4.10 (Composition)

Si $f \underset{a}{\to} b$ et $g \underset{b}{\to} \ell$, alors $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

Corollaire B4.11

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition B4.12 (Compatibilité avec la relation d'ordre)

Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et $f \underset{a}{\to} \ell_1$ et $g \underset{a}{\to} \ell_2$, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Dém. B4.12

On travaille avec $g - f$ qui tend vers $\ell_2 - \ell_1$. Si $\ell_1 > \ell_2$, alors $\ell_1 - \ell_2 > 0$ et donc $f - g$ admet un minorant strictement positif dans un voisinage de a. Ceci contredit l'hypothèse sur le signe de $g - f$.

Remarque. En particulier, si $f \leqslant b$ au voisinage de a et $f \underset{a}{\to} \ell$, alors $\ell \leqslant b$.

Théorème B4.13 (Gendarmes)

(i) Si $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a et $g, h \underset{a}{\to} \ell$, alors $f \underset{a}{\to} \ell$.
(ii) Si $g \leqslant f$ au voisinage de a et $g \underset{a}{\to} +\infty$, alors $f \underset{a}{\to} +\infty$.

Théorème B4.14 (Caractérisation séquentielle de la limite)

On a équivalence entre
(i) $f \underset{a}{\to} \ell$,
(ii) Pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Remarque. On utilise aussi la contraposée de (i)⇒(ii), notamment pour démontrer qu'une fonction est n'admet pas de limite, ou est discontinue en un point.

Théorème B4.15 (Variations)

Soit f définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) et croissante au voisinage de b. Alors

soit f est majorée au voisinage de b, alors elle admet une limite finie en b,

soit $f \underset{b}{\to} +\infty$.

Remarque. On a un résultat similaire avec une fonction décroissante, en remplaçant la majoration par une minoration, et $+\infty$ par $-\infty$.

1.3 Fonctions continues

Définition B4.16

On dit qu'une fonction f est **continue sur** I lorsqu'elle est continue en tout $a \in I$.

Notation. On désigne par $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues sur I.

Proposition B4.17

- Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Alors
  - (i) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{C}(I)$,
  - (ii) $fg \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$,
  - (iii) $|f| \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
  - (iv) $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $I \setminus \{x \in I,\ f(x) = 0\}$.
- Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I)$.

Théorème B4.18 (Valeurs intermédiaires)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset I$. Si

➢ f est continue sur $[a, b]$,

➢ γ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(c)$.

Théorème B4.19

L'image d'un intervalle (resp. d'un segment) par une fonction continue est un intervalle (resp. un segment).

Théorème B4.20

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Notation. En particulier f continue sur $[a, b]$ atteint son maximum et son minimum, notés $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Théorème B4.21

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si f est injective, alors f est strictement monotone.

2 Dérivation des fonctions réelles

2.1 Dérivabilité

Définition B4.22

soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ différent de $\inf I$ (resp. $\sup I$).

(i) On dit que f est **dérivable à gauche** (resp. **à droite**) en a lorsque $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie à gauche (resp. à droite), appelée **nombre dérivé à gauche** (resp. **à droite**).

(ii) On dit que f est **dérivable en** a lorsqu'elle est dérivable à gauche et à droite en a et que les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux. Dans ce cas, leur valeur commune est appelée **nombre dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

(iii) f est **dérivable sur** I lorsqu'elle est dérivable en tout point $a \in I$. On peut alors définir sur I la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ appelée **fonction dérivée** de f.

Remarque. Autrement dit, f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement admet une limite finie lorsque x tend vers a et on a

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Définition B4.23

Étant donnés f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, on définit **la tangente** en A à $\mathscr{C}$ comme la droite $\mathcal{T}_a$ d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque. Cette droite est (en un sens topologique qu'on ne précisera pas dans le cadre de ce cours) la limite quand x tend vers a des droites sécantes à $\mathscr{C}$ en A et un point M d'abscisse x.

Proposition B4.24 (Développement limité à l'ordre 1)

soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors on a équivalence entre :

(i) f est dérivable en a.

(ii) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une fonction ε tels que :

$$\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \quad \text{et} \quad f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x). \tag{B4.1}$$

Remarque. L'équation de la condition (B4.1) peut s'écrire

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Proposition B4.25

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Remarque. On peut écrire la même propriété à gauche et à droite.

Proposition B4.26 (Calcul de dérivées)

soit f et g dérivables en a et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;

(ii) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(iii) si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$;

(iv) si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$;

(v) si g est dérivable en $b = f(a)$, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$;

(vi) si f est strictement monotone sur I et à valeurs dans J, on peut définir sur J sa fonction réciproque f^{-1}. Dans ce cas, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Théorème B4.27

soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a qui n'est pas une borne de I. Si f présente un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

2.2 Dérivées successives

Définition B4.28

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On note $f^{(0)} = f$.

(i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $f^{(k-1)}$ définie. On dit que f est k **fois dérivable** sur I lorsque $f^{(k-1)}$ est dérivable. On note alors $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, appelée **dérivée k-ième** de f.

(ii) f est **infiniment dérivable** lorsqu'elle est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Si f est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur I.

(iv) On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarques.

- On peut adapter ces définitions pour parler d'une fonction k fois (ou infiniment) dérivable en $a \in I$.
- Cependant, pour parler d'une fonction k fois dérivable en un seul point, l'existence de $f^{(k-1)}$ sur I tout entier est nécessaire.
- On écrit le plus souvent f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$.

Notations. On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on peut écrire simplement $\mathcal{C}^k(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Proposition B4.29

soit $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

Théorème B4.30 (Leibniz)

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, soit $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$). Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Remarque. Même si on ne peut donner ici aucune formule générale pour les dérivées, on peut montrer que l'inverse d'une fonction $\mathcal{C}^k$ et la composée de deux fonctions $\mathcal{C}^k$ (moyennant les hypothèses usuelles) sont également de classe $\mathcal{C}^k$.

2.3 Étude globale des fonctions dérivables

Dans tout ce paragraphe, on donne $a < b$.

Théorème B4.31 (Rolle)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si
- ➢ f est continue sur $[a,b]$,
- ➢ f est dérivable sur $]a,b[$,
- ➢ $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Les conséquences de ce théorème sont multiples. Parmi les plus connues et utiles, les deux résultats suivants.

Proposition B4.32

(i) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f admet (au moins) $n+1$ zéros sur $[a,b]$. Alors f' admet (au moins) n zéros sur $]a,b[$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b]$. On suppose que f admet (au moins) $n+1$ zéros sur $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Théorème B4.33 (Accroissements finis)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si
- ➢ f est continue sur $[a,b]$,
- ➢ f est dérivable sur $]a,b[$,

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Proposition B4.34 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si
- ➢ f est continue sur $[a,b]$,
- ➢ f est dérivable sur $]a,b[$,
- ➢ $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, \ m \leqslant f'(x) \leqslant M$,

alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Corollaire B4.35

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si

- ➢ f est continue sur $[a,b]$,
- ➢ f est dérivable sur $]a,b[$,
- ➢ $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant k$,

alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|$.

Théorème B4.36 (Limite de la dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

- ➢ f est continue sur I,
- ➢ f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
- ➢ f' admet pour limite ℓ en a,

alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a).$$

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

3 Cas des fonctions complexes

Définition B4.37

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f **tend vers** ℓ quand x tend vers a lorsque

$$|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

Proposition B4.38

Avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$,

(ii) $\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(\ell)$.

Remarque. Les définition de la continuité en un point $x_0 \in I$ et sur I sont inchangées et on a

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, f \text{ et } \mathrm{Im}\, f \text{ sont continues en } x_0.$$

Puis tout le paragraphe sur la dérivabilité peut être énoncé avec $f : I \to \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème B4.39 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si

- ➢ f est continue sur $[a, b]$,
- ➢ f est dérivable sur $]a, b[$,
- ➢ $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leqslant M$,

alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

Méthodes

- Prolongement d'une fonction par continuité.
- Étude et interprétation de la dérivabilité
  - ➢ par taux d'accroissement,
  - ➢ via le développement limité à l'ordre 1
- Calcul des dérivées successives d'une fonction
  - ➢ par récurrence,
  - ➢ par la formule de Leibniz.
- Obtenir l'existence d'une solution à une équation
  - ➢ par théorème des valeurs intermédiaires,
  - ➢ via une dérivée par théorème de Rolle ou des accroissements finis.
- Obtenir une inégalité par l'IAF.

Chapitre B5

Convexité

Objectifs

- Inégalité de convexité.
- Interprétation géométrique de la convexité.
- Caractérisation de la convexité suivant la régularité de la fonction.

1 Généralités

Définition B5.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

À l'inverse, on dit que f est **concave** lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Proposition B5.2

Avec les notations ci-dessus :

- f est convexe et concave si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est une droite affine.
- f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Proposition B5.3 (Inégalité de Jensen)

Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

2 Caractérisations

Proposition B5.4 (Croissance des pentes)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Pour tout $a \in I \setminus \{0\}$, on définit la fonction pente

$$\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(i) f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

(ii) Si f est convexe, alors pour tous $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Théorème B5.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est convexe.

(ii) f' est croissante sur I.

(iii) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Théorème B5.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors

- f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$,
- f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

Définition B5.7 (point d'inflexion)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet un **point d'inflexion** en x_0 lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que f ait des convexités contraires sur les deux intervalles $]a-\eta, a[$ et $]a, a+\eta[$.

Remarque. En particulier, un tel point est nécessairement un point intérieur de I.

Théorème B5.8

Avec les mêmes notations, on suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f'' s'annule et change de signe en a alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a.

Théorème B5.9

Soit I un intervalle ouvert et a un point intérieur de I. On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

- Si f est convexe sur I : $f'(a) = 0$ si et seulement si f admet un minimum global en x_0.
- Si f est concave sur I : $f'(a) = 0$ si et seulement si f admet un maximum global en a.

Méthodes

- Établir la convexité d'une fonction.
- Utiliser les inégalités de convexité.
- Utiliser la comparaison de $\mathscr{C}_f$ avec ses tangentes ou ses cordes.

Chapitre B6

Comparaisons locales

Objectifs

- Notions d'équivalence, de domination et de négligeabilité.
- Lien avec le comportement asymptotique.

1 Les trois relations

Définition B6.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, (v_n) ne s'annulant pas àpcr.

(i) On dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on note $u_n = o(v_n)$.

(ii) On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et on note $u_n \sim v_n$.

(iii) On dit que (u_n) est **dominée par** (v_n) lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est majorée et on note $u_n = O(v_n)$.

Notations. La notation $\sim$ est incomplète. On devrait plutôt écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et de même $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

Définition B6.2

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D et $a \in \overline{D}$. En a,

(i) on dit que f est **négligeable devant** g lorsque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et on note $f = o(g)$.

(ii) on dit que f et g sont **équivalentes** lorsque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et on note $f \sim g$.

(iii) On dit que f est **dominée par** g lorsque $\dfrac{f}{g}$ est majorée et on note $f = O(g)$.

Notations. La notation $\sim$ est incomplète. On devrait plutôt écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. On note de même $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ et $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$.

Exemples.

- $n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$,
- $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
- $n+28 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $n^2+28n+496 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.

Théorème B6.3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Alors

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

Exemples.

- En $+\infty$: $x \underset{x\to\infty}{=} o(x^2)$, $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$,
- En 0 : $x^3 \underset{x\to0}{=} o(x^2)$, $\quad x^2 \underset{x\to0}{=} o(x)$.
- $x+28 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, $x^2+28x+496 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$

Théorème B6.4

Soit f et g deux fonctions réelles. Alors

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g).$$

Dém. B6.4

$$f-g=o(g) \Leftrightarrow \frac{f-g}{g} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g}-1 \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} \longrightarrow 1 \Leftrightarrow f \sim g.$$

Exemple. $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ car $x=o(x^2)$. Voir aussi que $x^2+x = x^2\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}_{\to 1}$.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :

Proposition B6.5

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition B6.6

La relation $\sim$ est

réflexive : $f \sim f$;

symétrique : $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$;

transitive : $\left.\begin{array}{l} f \sim g \\ g \sim h \end{array}\right\} \Rightarrow f \sim h.$

Remarques.

- Dire $u_n = o(1)$ revient à dire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ revient à dire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarques.

- Dire $f = o(1)$ revient à dire $f \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- Si $\ell \neq 0$, $f \underset{a}{\sim} \ell$ revient à dire $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Remarques.

- On a aussi $f \sim g \Leftrightarrow f-g=o(f)$. Comprendre que f et g sont équivalentes si et seulement si leur différence est négligeable devant l'une des deux, *i.e.* leur ordre de grandeur (commun !).
- On peut avoir $f \sim g$ sans que $f-g$ soit « petit » dans l'absolu. Par exemple $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et leur différence vaut x, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Mais on a $x=o(x^2)$.
- Quand on donne un équivalent, inutile de donner plusieurs termes de différents ordres de grandeur. Par exemple, $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2+x$ est vrai mais inopérant car on a aussi $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2+28x$. Le

seul équivalent immuable et donc le seul intéressant est $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

2 Utilisation

Proposition B6.7 (Comparaison et limites)

Étant données deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs positives,

$$\left.\begin{array}{r} u_n \sim v_n \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell;$$

$$\left.\begin{array}{r} u_n = o(v_n) \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} u_n = o(v_n) \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition B6.8 (Comparaison et limites)

Étant données deux fonctions f et g à valeurs positives,

$$\left.\begin{array}{r} f \sim g \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell;$$

$$\left.\begin{array}{r} f = o(g) \\ g \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f \xrightarrow[x\to a]{} 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} f = o(g) \\ f \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$$

3 Calcul

Proposition B6.9

Soit $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ définissant quatre suites réelles. Alors

(i) $u_n v_n \sim a_n b_n$;

(ii) si u_n et v_n ne s'annulent pas àpcr, $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$;

(iii) si $u_n \geqslant 0$ àpcr, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition B6.10

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f \underset{a}{\sim} u$ et $g \underset{a}{\sim} v$ définissant quatre fonctions réelles. Alors

(i) $fg \underset{a}{\sim} uv$;

(ii) si g et v ne s'annulent pas, alors $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{u}{v}$;

(iii) si $f \geqslant 0$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} u^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dém. B6.10

(i) $\dfrac{fg}{uv} = \dfrac{f}{u}\,\dfrac{g}{v}$ donc : si $\dfrac{f}{u} \to 1$ et $\dfrac{g}{v} \to 1$, alors $\dfrac{fg}{uv} \to 1$.

(ii) $\dfrac{f/g}{u/v} = \dfrac{f}{g}\,\dfrac{v}{u}$ ...

(iii) $\dfrac{f^\alpha}{u^\alpha} = \left(\dfrac{f}{u}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln(f/u)}$ donc si $\dfrac{f}{u} \to 1$, $\ln(f/u) \to 0$, donc $\dfrac{f^\alpha}{u^\alpha} \to 1$.

Remarque. ⚠ Attention !

- On ne somme pas d'équivalents : soit $f(x) = x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) = -x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} -x^2$. Bien sûr on ne peut absolument pas écrire que $f + g \sim 0$, c'est pire que faux !
Contre-exemple (légèrement) moins stupide : $x + 1 \sim x + 2$ et $-x \sim -x$ mais on n'a pas $1 \sim 2$.

- On ne compose pas les équivalents à gauche (en particulier on ne les passe pas au log ou à l'exponentielle). Contre-exemple : $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $e^{x+1} = ee^x$ qui n'est pas équivalent à e^x.

Proposition B6.11

Soit $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\left.\begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha u_n + \beta v_n = o(w_n)$,

(ii) $\left.\begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n = o(w_n)$,

(iii) Si $u_n = o(w_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

Proposition B6.12

Soit f, g et h trois fonctions réelles et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\left.\begin{array}{l} f = o(h) \\ g = o(h) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha f + \beta g = o(h)$,

(ii) $\left.\begin{array}{l} f = o(g) \\ g = o(h) \end{array}\right\} \Rightarrow f = o(h)$,

(iii) Si $f = o(h)$, alors $fg = o(hg)$.

Dém. B6.12

(i) $\dfrac{\alpha f + \beta g}{h} = \alpha \dfrac{f}{h} + \beta \dfrac{g}{h}$ (ii) $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g}\dfrac{g}{h}$ (iii) $\dfrac{fg}{hg} = \dfrac{f}{h}$.

Proposition B6.13 (Suites de référence)

Soient $x > 1$ et $\alpha, \beta > 0$. Alors
- $(\ln n)^\beta \underset{n\to\infty}{=} o(n^\alpha)$,
- $n^\alpha \underset{n\to\infty}{=} o(x^n)$,
- $x^n \underset{n\to\infty}{=} o(n!)$,
- $n! \underset{n\to\infty}{=} o(n^n)$.

Proposition B6.14 (Croissances comparées)

Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ avec $\alpha < \beta$. Alors

(i) En 0 :
$|\ln x|^\gamma = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ et $\dfrac{1}{x^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

(ii) En $+\infty$: $x^\alpha = o(x^\beta)$, $x^\alpha = o(e^x)$ et $(\ln x)^\gamma = o(x^\alpha)$.

Théorème B6.15 (Équivalents usuels)

Soit (u_n) une suite tendant vers 0. Alors

(i) $\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(ii) $\tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(iii) $\operatorname{sh} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(iv) $\operatorname{th} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(v) $\operatorname{Arctan} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(vi) $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(vii) $(e^{u_n}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(viii) $((1+u_n)^\alpha - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$;

(ix) $1-\cos u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$.

Remarque. Plus généralement, on peut retenir que pour f une fonction dérivable en 0 avec $f'(0)\neq 0$ et (u_n) qui converge vers 0, on a

$$(f(u_n)-f(0)) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)u_n.$$

Théorème B6.16 (Équivalents usuels en 0)

On a les équivalents suivants.

(i) $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(ii) $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(iii) $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(iv) $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(v) $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

(vi) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(vii) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(viii) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$;

(ix) $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;

Remarque. Plus généralement, si f est dérivable en $a\in D$ avec $f'(a)\neq 0$, alors

$$f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

Dém. B6.16

(i) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$ donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)(x-a)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

Méthodes

- Vérifier une relation de comparaison par quotient.
- Déterminer un équivalent
  - ➢ d'un produit, d'un quotient,
  - ➢ d'une somme en gardant une trace du reste,
  - ➢ avec les équivalents usuels.

Chapitre B7

Développements limités

Objectifs

- Notion de développement limité d'une fonction.
- Description locale de l'allure d'une fonction.

1 Formules de Taylor

Théorème B7.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors pour tous $a, x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. Le polynôme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

est appelé **polynôme de Taylor** de f de degré n et la fonction R_n définie par

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée **reste intégral**.

Théorème B7.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Avec les notations ci-dessus et en appelant M_{n+1} un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, x]$, on a

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Théorème B7.3 (Formule de Taylor-Young)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, on ait
$$f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x),$$
avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Autrement dit,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

2 Développements limités

2.1 Généralités

Définition B7.4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à I. On dit que f admet un **développement limité en** a **à l'ordre** n si l'on peut écrire

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec

- P un polynôme tel que $\deg P \leqslant n$, appelé **partie régulière** ou **principale** du développement,
- $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. La fonction $x \mapsto (x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelée **reste** du développement limité de f.

Remarques.

- On se limite dans toute la suite au cas $a = 0$. En effet, si $a \in \mathbb{R}^*$ on peut s'y ramener par le changement de variable $x \to x - a$. Et si $a = \pm\infty$, il suffit de poser $u = \dfrac{1}{x}$.
- Le théorème de Taylor-Young garantit l'existence d'un DL à l'ordre n dès que la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition B7.5 (Unicité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ afmettant un DL à l'ordre n. Alors la partie principale de ce DL est unique. C'est-à-dire que s'il existe des polynômes P_1 et P_2 de degré n tels que

$$\forall x \in I,\ f(x) = P_1(x) + o(x^n) = P_2(x) + o(x^n),$$

alors $P_1 = P_2$.

Corollaire B7.6

- Si f admet un DL à l'ordre n en 0, alors pour tout $p \leqslant n$, f admet un DL à l'ordre p en 0.
- Si f est paire (respectivement impaire) et admet un DL en 0, alors ce DL ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

2.2 Opérations

Proposition B7.7 (Somme, produit)

Soient f et g deux fonctions admettant un DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les fonctions $\alpha f + \beta g$ et $f \times g$ admettent un DL à l'ordre n en 0 et

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \tag{B7.1}$$

$$(f \times g)(x) = S(x) + o(x^n), \tag{B7.2}$$

où S est égal au produit $P \times Q$ privé de tous ses termes de degré (strictement) supérieur à n.

Proposition B7.8 (Composition)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que

- ➢ f admet un DL à l'ordre n en 0 : $f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$,
- ➢ $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,
- ➢ g admet un DL à l'ordre n en 0 : $g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Alors $g \circ f$ admet un DL à l'ordre n en 0 dont la partie principale est constituée des termes de degré au plus n dans le polynôme $Q \circ P$.

Proposition B7.9 (Primitive)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. On suppose que

- f' admet un DL à l'ordre n en 0 : $f'(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$,
- $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ell$.

Alors f admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$f(x) = \ell + Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n),$$

avec $Q' = P$ et $Q(0) = 0$.

Remarque. Pas de résultat général sur la dérivée !

3 Développements limités usuels en 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

Méthodes

- Utiliser les formules de Taylor pour
  - ➢ obtenir des inégalités,
  - ➢ obtenir un DL.
- Écrire le DL d'une fonction simple.

Chapitre B8

Séries numériques

Objectifs

- Problèmes de convergence d'une série.
- Séries de référence.
- Techniques de comparaison.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Convergence d'une série

Définition B8.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le nombre S_n est appelé **somme partielle** d'ordre n de la série.

Notations. On note cette série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Définition B8.2

- On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie $S \in \mathbb{K}$. On appelle alors **somme de la série** ce nombre S.
- Si la suite des sommes partielles diverge, on dit que la série est **divergente**.

Notation. Dans le cas d'une série convergente, on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N.$$

Remarque. Attention à ne pas confondre les notations. Malgré l'immuable présence du signe sigma, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ désigne la série de terme général u_n ; c'est une suite et cela n'a aucun rapport avec sa somme, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui, lorsque la série converge, est un nombre fini et avec lequel on ne peut écrire des calculs qu'après avoir établi son existence.

Remarque. Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. On note $\sum_{n\geqslant n_1} u_n$ la suite $\left(\sum_{k=n_1}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_1}$. Deux séries $\sum_{n\geqslant n_1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_2} u_n$ ont même nature.

Définition B8.3

Étant donnée $\sum u_n$ une série qui converge vers S, le nombre

$$R_n = S - S_n = S - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est appelé **reste** à l'ordre n de la série $\sum u_n$. On écrit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et on a $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2 Séries de référence

Théorème B8.4 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition B8.5

Si u_n ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque. Bien évidemment la réciproque est fausse.

Définition B8.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement** (ou **trivialement**).

Proposition B8.7 (Série télescopique)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

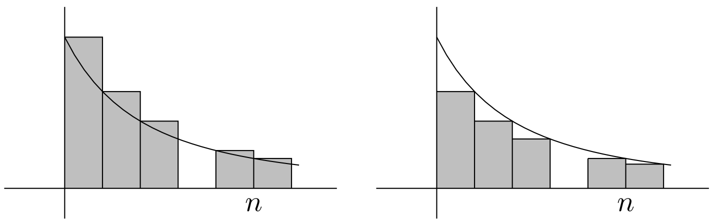
Théorème B8.8 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Proposition B8.9 (Dérivées d'une série géométrique)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Dans le cas où il est difficile de calculer la somme partielle, on peut, en présence de séries réelles positives de terme général décroissant, utiliser nos connaissances sur les intégrales grâce au critère de comparaison suivant.



Proposition B8.10 (Comparaison entre série et intégrale)

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante et $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \int_1^n f \text{ admet une limite finie.}$$

3 Propriétés

Proposition B8.11 (Linéarité)

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- $\sum \lambda u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont des séries convergentes ;
- et les sommes suivent la propriété de linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque. En résumé, l'ensemble des séries convergentes (muni de l'addition des suites et de leur multiplication par un scalaire) forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; et l'application qui à une série convergente associe sa somme est linéaire.

4 Étude de convergence

4.1 Cas positif

Théorème B8.12 (Comparaison)

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites de nombres réels positifs.

➢ Si on a $u_n \leqslant v_n$ àpcr ou $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$, alors
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge,
- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

➢ Si on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

4.2 Cas général

Définition B8.13

Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente

Proposition B8.14

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque. Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**. Par exemple $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ n'est pas absolument convergente mais elle converge (voir séries alternées ci-après) et on peut même calculer sa somme : $\ln(2)$ (conséquence de l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange).

Proposition B8.15 (Séries à valeurs complexes)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\left(\sum \operatorname{Re} u_n\right)$ et $\left(\sum \operatorname{Im} u_n\right)$ convergent. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n.$$

Théorème B8.16 (Critère spécial des séries alternées)

Soit $u_n = (-1)^n f(n)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- f est positive,
- f est décroissante,
- $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors :

- $\sum u_n$ converge ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ est comprise entre S_n et S_{n+1} ;
- les restes vérifient pour tout $n \geqslant 0$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Méthodes

- Établir la convergence d'une série
  - ➢ en reconnaissant une série de référence,
  - ➢ en la comparant à une série à termes positifs,
  - ➢ par le calcul.
- Calculer une somme de série
  - ➢ par télescopage,
  - ➢ en faisant apparaître des séries usuelles,
  - ➢ par passage à la limite.

Chapitre B9

Intégration sur un segment

Objectifs

- Fonctions lipshitziennes et uniformément continues.
- Principe d'une approximation uniforme.
- Construction de l'intégrale.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I désigne un intervalle et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

1 Uniforme continuité

Définition B9.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est **uniformément continue sur** I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I^2, \left(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right).$$

Définition B9.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est **K-lipschitzienne sur** I lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, \ |f(x) - f(y)| < K|x - y|.$$

On dit que f est **lipschitzienne sur** I lorsqu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ telle qu'elle soit K-lipschitzienne.

Proposition B9.3

(i) Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue.

(ii) Toute fonction uniformément continue sur un intervalle y est continue.

Théorème B9.4 (Heine)

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

2 Continuité par morceaux

Définition B9.5

On appelle **subdivision de** $[a,b]$ toute famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$.

2.1 Fonctions en escalier

Définition B9.6

On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$. Une telle subdivision est alors dite **adaptée** à f.

Notation. L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$.

Proposition B9.7

Soit $f, g \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) L'ajout d'un nombre fini de points à une subdivision adaptée à f en fait encore une subdivision adaptée à f.

(ii) La réunion de deux subdivisions adaptées respectivement à f et g est une subdivision adaptée à f et à g.

Les fonctions $|f|$, $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, λf, $f+g$ et fg sont en escalier sur $[a,b]$.

2.2 Fonctions continues par morceaux

Définition B9.8

On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est **continue par morceaux** lorsqu'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et prolongeable par continuité en a_k et a_{k+1}. Une telle subdivision est alors dite **adaptée** à f.

Notation. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

Proposition B9.9

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les fonctions $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, λf, $f+g$ et fg sont également dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

Théorème et définition B9.10

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée. On appelle **norme infinie de** f et on note $\|f\|_\infty = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

2.3 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Proposition B9.11

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

(i) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Définition B9.12

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

(i) On appelle **distance uniforme** le réel $\|f-g\|_\infty$.

(ii) On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{CM}([a,b),\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur $[a,b]$ lorsque $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On dit alors que f est la **limite uniforme** de la fonction f_n.

Théorème B9.13

Toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.

3 Construction de l'intégrale

3.1 Fonctions en escalier

Théorème et définition B9.14

Soit $f \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]a_i,a_{i+1}[$.
Alors le nombre $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)y_i$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie. On l'appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ et on le note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition B9.15

Soit $f,g \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.

(i) Linéarité : $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda\int_{[a,b]} f + \mu\int_{[a,b]} g$.

(ii) Inégalité triangulaire (améliorée) : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.

3.2 Fonctions continues par morceaux

Théorème et définition B9.16

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f, la suite $\displaystyle\left(\int_{[a,b]} \varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ vers une limite qui ne dépend pas du choix de la suite (φ_n).
Cette limite s'appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ et est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition B9.17

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(i) Linéarité : $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$

(ii) Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty.$

(iii) Relation de Chasles : $\forall c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[} a,c]f + \int_{[} c,b]f.$

(iv) Parties réelle et imaginaire : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f).$

(v) Si f et g coïncident sauf en un nombre fini de valeurs, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g.$

Proposition B9.18

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$.

(i) Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0.$

(ii) Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g.$

Notation. Pour $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$, on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$ si $a \leqslant b$ et $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$ si $a > b$.

Remarque. Les théorèmes d'intégration énoncés précédemment découlent naturellement de cette définition étendue :

- théorème fondamental de l'analyse,
- théorème fondamental du calcul intégral,
- intégration par parties,
- changement de variable,
- formule de Taylor avec reste intégral,
- inégalité de Taylor-Lagrange (que l'on peut maintenant énoncer avec la notation $\|\cdot\|_\infty$),

4 Approximation d'intégrales

Théorème B9.19 (Sommes de Riemann)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques.

- On a de même $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $f \in \mathcal{CM}([0,1],\mathbb{K})$, alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On peut toujours se ramener à ce cas, quitte à effectuer un changement de variable affine.

Méthodes

- Calculer une limite à l'aide d'une somme de Riemann.

Chapitre B10

Familles sommables

Objectifs

- Sommabilité d'une famille.
- Manipulations d'une somme (paquets, Fubini).

1 Familles sommables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

Notation. On note $[0,+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On y étend les lois $+$ et $\times$ et la relation d'ordre $\leqslant$.

Proposition B10.1

Soit $A \subset [0,+\infty]$. Alors A admet une borne supérieure dans $[0,+\infty]$. Si A est majoré, sa borne supérieure, notée $\sup A$, coïncide avec celle dans $\mathbb{R}$. Sinon, $\sup A = +\infty$.

1.1 Sommabilité

Notation. Étant donné un ensemble I, on note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

Définition B10.2

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.

(i) On appelle **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et on note $\sum_{i\in I} u_i$ la borne supérieure (dans $[0,+\infty]$) de l'ensemble des sommes sur les sous-familles finies. Autrement dit,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I)\right\}.$$

(ii) On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque $\sum_{i\in I} u_i$ est finie.

Proposition B10.3

(i) Si I est fini, alors la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ coïncide avec la somme finie $\sum_{i\in I} u_i$.

(ii) Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est à support fini, alors elle est sommable et sa somme coïncide avec la somme (finie) de ses termes non nuls.

(iii) Si un de ses éléments vaut $+\infty$, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Proposition B10.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Alors on a équivalence entre

(i) La famille $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est sommable.

(ii) La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

1.2 Propriétés

Théorème B10.5 (Comparaison)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $[0,+\infty]$ telles que $\forall i \in I,\ u_i \leqslant v_i$. Alors

(i) $\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$.

(ii) Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

(iii) Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Proposition B10.6

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille à valeurs dans $[0,+\infty]$ et $J \subset I$. Alors

(i) $\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

(ii) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

(iii) Si $(u_i)_{i\in J}$ n'est pas sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Théorème B10.7 (Changement d'indice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\varphi : J \to I$ une bijection. Alors

(i) $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\varphi(j)}$.

(ii) $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(j)})_{j\in J}$ est sommable.

(iii) Si $(u_i)_{i\in J}$ n'est pas sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Proposition B10.8

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $[0,+\infty]$ et $\lambda \in]0,+\infty[$.

(i) $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

(ii) $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables.

(iii) $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

(iv) $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

1.3 Sommation par paquets et Fubini

Théorème B10.9 (Sommation par paquets positif)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} u_i.$$

Théorème B10.10 (Fubini positif)

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable,

(ii) $\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable,

(iii) $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.

2 Cas général

Désormais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Sommabilité

Définition B10.11

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Notation. On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des famiilles sommables indexées par I.

Définition et proposition B10.12

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

Définition et proposition B10.13

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i).$$

Proposition B10.14

(i) Si I est fini, alors la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ coïncide avec la somme finie $\sum_{i\in I} u_i$.

(ii) Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est à support fini, alors elle est sommable et sa somme coïncide avec la somme (finie) de ses termes non nuls.

Proposition B10.15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors on a équivalence entre

(i) La famille $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est sommable.

(ii) La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

2.2 Propriétés

Proposition B10.16

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $J \subset I$. Alors

(i) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

(ii) Si $(u_i)_{i\in J}$ n'est pas sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Théorème B10.17 (Changement d'indice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\varphi : J \to I$ une bijection. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(j)})_{j\in J}$ est sommable. Dans ce cas, on a

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\varphi(j)}.$$

Proposition B10.18 (Linéarité)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$.

Proposition B10.19 (Inégalité triangulaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|.$$

2.3 Sommation par paquets et Fubini

Théorème B10.20 (Sommation par paquets)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors

(i) pour tout $k\in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable,

(ii) $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable,

(iii) $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i.$

Théorème B10.21 (Fubini)

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(i) $\displaystyle\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable,

(ii) $\displaystyle\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.

(iii) $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}.$

Proposition B10.22

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors

(i) la famille $(u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable,

(ii) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_iv_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$

Théorème B10.23 (Produit de Cauchy)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \sum\limits_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Alors la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Méthodes

- Vérifier la sommabilité d'une famille.
- Calculer la somme d'une famille sommable.

Chapitre B11

Fonctions de deux variables

Objectifs

- Notion de continuité pour une fonction de deux variables.
- Dérivées partielles.
- Gradient et son interprétation.
- Recherche d'extrema.

1 Topologie d'un espace normé

1.1 Ouverts

Dans ce paragraphe, on énonce des résultats généraux dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, mais dans la perspective de ce chapitre, on pense $E = \mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne.

Définition B11.1

Soit $\omega \in E$ et $r > 0$. On appelle

(i) **boule ouverte** de centre ω et de rayon r l'ensemble $B(\omega, r) = \{x \in E \mid \|x - \omega\| < r\}$,

(ii) **boule fermée** de centre ω et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(\omega, r) = \{x \in E \mid \|x - \omega\| \leqslant r\}$,

Définition B11.2

Soit $x \in E$. On appelle **voisinage** de x toute partie de E qui contient une boule ouverte de centre x.

Notation. On notera $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.

Définition B11.3

Soit $A \subset E$. On dit que A est un **ouvert** lorsqu'il est voisinage de chacun de ces points, autrement dit
$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A.$$
On dit que A est un **fermé** de E lorsque son complémentaire est un ouvert.

Proposition B11.4

(i) $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.

(ii) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

(iii) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Proposition B11.5

(i) $\emptyset$ et E sont des fermés de E.

(ii) Toute intersection de fermés est un fermé.

(iii) Toute réunion finie de fermés est un fermé.

1.2 Continuité

Définition B11.6

Soit $\mathcal{U} \subset E$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue lorsque pour tout $x_0 \in \mathcal{U}$, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$, *i.e.*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{U},\ (\|x - x_0\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

2 Dérivation

2.1 Fonctions partielles

Désormais on étudie les fonctions de deux variables, *i.e.* définies sur $\mathbb{R}^2$ ou sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans cette partie, $\mathcal{U}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Définition B11.7

On appelle **graphe** de f la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par
$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathcal{U}\}.$$

Définition B11.8

Soit $a = (x_a, y_a) \in \mathcal{U}$. Les **fonctions partielles** de f en a sont les applications

$$f(\cdot, y_a) : x \mapsto f(x, y_a) \quad \text{et} \quad f(x_a, \cdot) : y \mapsto f(x_a, y).$$

Proposition B11.9

Si f est continue en $a \in \mathcal{U}$, alors ses fonctions partielles en a sont continues en a.

2.2 Dérivées partielles

Définition B11.10

Soit $a = (x_a, y_a) \in \mathcal{U}$. Notons $f_x = f(\cdot, y_a)$ et $f_y = f(x_a, \cdot)$ les fonctions partielles de f en a. On appelle **dérivées partielles** de f en a les dérivées des fonctions partielles de f en a, notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_a, y_a) = f_x'(x_a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_a, y_a) = f_y'(y_a).$$

Définition B11.11

On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est **de classe** $\mathcal{C}^1$ lorsqu'elle admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{U}$ et que les fonctions dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{U}$, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Proposition B11.12

Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

(ii) $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

(iii) Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Théorème B11.13 (Développement limité à l'ordre 1)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{U}$. Il existe ε une fonction définie sur un voisinage V de $0_{\mathbb{R}^2}$ et tendant vers 0 en $0_{\mathbb{R}^2}$ telle que

$$\forall u = (h,k) \in V,\ f(a+u) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + \|u\|\varepsilon(u).$$

2.3 Gradient

Définition B11.14

Si f possède des dérivées partielles en $a = (x_a, y_a)$, on appelle **gradient** de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \operatorname{grad} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}.$$

Proposition B11.15

Soit f, g admettant des dérivées partielles en $a \in \mathcal{U}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$,

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$,

(iii) Si f ne s'annule pas, alors $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\nabla f$.

(iv) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $\nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \times \nabla f$.

2.4 Composition

Théorème B11.16 (Règle de la chaîne)

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, I un intervalle véritable et $\gamma : I \to \mathcal{U}$. Pour tout $t \in I$, on note

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Si f et γ sont de classe $\mathcal{C}^1$ (*i.e.* f, x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\varphi = f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I,\ \varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t).$$

Théorème B11.17

Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (u,v) \in \mathcal{U}$, $(x(u,v), y(u,v)) \in \mathcal{V}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}, \mathbb{R})$. Alors $\varphi : (u,v) \mapsto f(x(u,v), y(u,v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et on a, pour tout $(u,v) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)),$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)).$$

3 Extrema

Définition B11.18

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{U}$. On dit que f a un

(i) **minimum local** en a lorsque f est minorée par $f(a)$ sur un voisinage de a ;
(ii) **maximum local** en a lorsque f est majorée par $f(a)$ sur un voisinage de a ;
(iii) **extremum local** en a lorsqu'elle a un minimum ou un maximum local en a ;
(iv) **minimum global** en a lorsque f est minorée par $f(a)$;
(v) **maximum global** en a lorsque f est majorée par $f(a)$;
(vi) **extremum global** en a lorsqu'elle a un minimum ou un maximum global en a.

Définition B11.19

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{U}$. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

Proposition B11.20

Si f a un extremum local en $a \in \mathcal{U}$, alors a est un point critique de f.

Méthodes

- Étude de la continuité d'une fonction de deux variables.
- Dérivation d'une fonction de deux variable.
- Utilisation de la règle de la chaîne.
- Détermination des extrema d'une fonction de deux variables.

Troisième partie

De algebra fundamentali

Chapitre C1

Ensembles et applications

Objectifs

- Opérations ensemblistes.
- Notions d'injectivité et de bijectivité.
- Notions d'image directe et d'image réciproque.
- Propriétés des relations binaires.

1 Ensembles

Un **ensemble** peut être vu comme une collection d'objets, appelés **éléments**. Un des axiomes de la théorie des ensemble est l'existence d'un ensemble qui ne contient aucun élément, appelé **ensemble vide** et noté $\emptyset$.

Notation. On note $x \in E$ le fait qu'un objet x appartienne à un ensemble E.

Définition C1.1

On dit qu'un ensemble F est **inclus** dans un ensemble E et on note $F \subset E$ lorsque

$$\forall x \in F,\, x \in E.$$

On dit aussi que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E.

Remarque. Autrement dit : $F \subset E \Leftrightarrow \forall x,\, (x \in F \Rightarrow x \in E)$.

Notation. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.

Théorème C1.2

Soit A et B des ensembles. On a

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Remarque. On a plusieurs manières de décrire un ensemble : en extension (*i.e.* par une énumération complète de ses éléments) ou en compréhension ($\{x \mid P(x)\}$, où $P(x)$ est un prédicat).

Définition C1.3

Étant données deux parties A et B d'un ensemble E, on définit

(i) la **réunion** de A et B : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$,

(ii) l'**intersection** de A et B : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$,

(iii) la **différence** de B et A : $B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\} = B \cap \overline{A}$.

(iv) le **complémentaire** de A dans E : $\overline{A} = E \setminus A$.

On dit que A et B sont **disjointes** si leur intersection est vide.

Notations. On peut aussi noter $\complement_E A = E \setminus A$, surtout s'il est nécessaire de préciser l'ensemble ambiant. Si l'ensemble E est sous-entendu, on peut aussi rencontrer $A^c = \overline{A}$.

Proposition C1.4

Étant données 3 parties A, B et C d'un ensemble E, on a

(i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(ii) $\overline{\overline{A}} = A$;

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

(iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(vi) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Remarque. À l'aide de ces opérations, on peut encore définir la **différence symétrique** : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, qui correspond à un « ou exclusif ».

Définition C1.5

Soit E et I deux ensembles. Étant donnée $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, on appelle

(i) **réunion** des (A_i) :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\},$$

(ii) **intersection** des (A_i) :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\}.$$

Proposition C1.6

Avec les mêmes notations, soit X une partie de E. On a

(i) $\displaystyle \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap X = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap X)$,

(ii) $\displaystyle \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup X = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup X)$,

(iii) $\displaystyle \bigcup_{i \in I} A_i \subset X \Leftrightarrow (\forall i \in I,\, A_i \subset X)$,

(iv) $\displaystyle X \subset \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I,\, X \subset A_i)$.

Définition C1.7

Soit E et I deux ensembles. Étant donnée $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, on dit que

(i) $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement disjoint** de E lorsque
- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$,
- $\forall i, j \in I,\, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

(ii) $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition** de E lorsque c'est un recouvrement disjoints tel que, de plus, $\forall i \in I,\, A_i \neq \emptyset$.

Définition C1.8

Étant donnés deux ensembles E et F, on définit l'**ensemble produit** $E \times F$ par

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

2 Applications

Définition C1.9

Soient E et F deux ensembles non vides. Une **fonction** ou **application** f de E vers F est une correspondance qui à tout élément $x \in E$ associe un unique élément de F, noté $f(x)$.
Si $y = f(x)$, on dit que y est **l'image** de x et que x est un **antécédent** de y par f.
E s'appelle **ensemble de définition** ou **ensemble de départ** de f et F son **ensemble d'arrivée**.
On définit le **graphe** de f comme la partie $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ de $E \times F$.

Notation. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.
Exemples.

- On appelle **identité de** E l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E,\, \mathrm{id}_E(x) = x.$$

  Son graphe est appelé **diagonale** de $E \times E$.

- Soit $A \subset E$. On appelle **fonction indicatrice** de A l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in E,\, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Définition C1.10

Soient E et F deux ensembles et $A \subset E$.

(i) Si $f : E \to F$, on appelle **restriction** de f à A l'application $f|_A : A \to F$ définie pour tout $x \in A$ par $f|_A(x) = f(x)$.

(ii) Si $g : A \to F$, on dit que $f : E \to F$ est un **prolongement** de g à E si $g = f|_A$.

Définition C1.11

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle **composée** de f et g et on note $g \circ f$ l'application $x \mapsto g(f(x))$ de E dans G.

Définition C1.12

Soit $f : E \to F$. On dit que

(i) f est **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent ;

(ii) f est **surjective** si tout élément de F admet au moins un anétécédent ;

(iii) f est **bijective** si tout élément de F adment exactement un antécédent.

Remarques.

- Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.
- On utilise le plus souvent cette caractérisation de l'injectivité :

$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

ou parfois sa contraposée.

Théorème et définition C1.13

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \text{ et } f \circ g = \mathrm{id}_F\,.$$

Cette application est appelée **bijection réciproque** de f et notée f^{-1}.

Remarque. C'est l'application de F dans E qui a tout élément y de F associe son unique antécédent par f :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Proposition C1.14

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(i) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

(ii) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

(iii) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

(iv) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

(v) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(vi) Si f est bijective, alors f^{-1} l'est aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque. Évident mais pas anodin : par conséquent, la composée de deux bijections est une bijection.

Définition C1.15

Soit $f : E \to F$.

(i) Étant donnée $A \subset E$, on appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

(ii) Étant donnée $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

Remarque. . Si f est bijective, l'image réciproque de B par f coïncide avec l'image directe de B par la bijection réciproque f^{-1}. Mais la notation $f^{-1}(B)$ reste valable même si f n'est pas bijective et dans ce cas, parler de l'application f^{-1} n'a bien sûr aucun sens.

3 Relations binaires

Définition C1.16

Soit E un ensemble. Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E est la donnée d'une partie $\mathcal{G}$ de $E \times E$. Étant donnés $x, y \in E$, on dit que x est **en relation avec** y (et on note $x\mathcal{R}y$) lorsque $(x, y) \in \mathcal{G}$.

Définition C1.17

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est

(i) **réflexive** lorsque $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$,

(ii) **symétrique** lorsque $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,

(iii) **transitive** lorsque $\forall x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$,

(iv) **antisymétrique** lorsque $\forall x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = x$.

Définition C1.18

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

(i) On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsqu'elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

(ii) On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'**ordre total** lorsque de plus :

$$\forall x, y \in E, \ (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x).$$

(iii) Dans le cas contraire, on dit que c'est une relation d'**ordre partiel**

Définition C1.19

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

(i) On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

(ii) Dans ce cas, pour tout $x \in E$, on définit la **classe d'équivalence** de x par :

$$\overline{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Proposition C1.20

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Soit $x, y \in E$.

- Si $x\mathcal{R}y$, alors $\overline{x} = \overline{y}$.
- Sinon $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

Proposition C1.21

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Alors $\{\overline{x} \mid x \in E\}$ forme une partition de E.

Méthodes

- Démonstration de relations ensemblistes :
  - ➢ inclusion d'ensembles,
  - ➢ être dans une intersection d'ensembles,
  - ➢ être dans une réunion d'ensembles.
- Caractérisation de l'appartenance à
  - ➢ une image directe,
  - ➢ une image réciproque.
- Caractérisation d'une application
  - ➢ injective,
  - ➢ surjective.
- Vérifier qu'une relation binaire est
  - ➢ une relation d'ordre,
  - ➢ une relation d'équivalence.

Chapitre C2

Structures algébriques

1 Loi de composition interne

1.1 Caractéristiques

Définition C2.1

Soit E un ensemble. Un **loi de composition interne** sur E est une application

$$\star : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \star y \end{array}$$

Notations.

- On note $x \star y$ plutôt que $\star(x, y)$ par imitation des lci usuelles $+$, $\times$ ou $\circ$ définies sur des ensembles de nombres ou de fonctions.
- On note $(E, \star)$ l'ensemble E muni de la loi $\star$. Cela forme ce qu'on appelle un **magma**.

Définition C2.2

Avec les mêmes notations, on dit que la loi $\star$ est

(i) **associative** lorsque $\forall x, y, z \in E$, $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$,

(ii) **commutative** lorsque $\forall x, y \in E$, $x \star y = y \star x$.

Remarque. Le cas échéant, on dit que le magma $(E, \star)$ est associatif (resp. commutatif).

Définition C2.3

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes $\star$ et $\otimes$. On dit que $\star$ est **distributive** par rapport à $\otimes$ lorsque

$$\forall x, y, z \in E, \begin{cases} x \star (y \otimes z) = (x \star y) \otimes (x \star z) \\ (y \otimes z) \star x = (y \star x) \otimes (z \star x) \end{cases} .$$

1.2 Élément neutre

Définition C2.4

Soit $(E, \star)$ un magma et soit $e \in E$. On dit que e est un **élément neutre** pour $\star$ lorsque $\forall x \in E$, $x \star e = e \star x = x$.

Proposition C2.5

Si un magma $(E, \star)$ admet un élément neutre, alors ce dernier est nécessairement unique.

Remarque. On parle alors de magma unifère.

1.3 Symétrique d'un élément

Définition C2.6

Soit E un magma et $x \in E$.

(i) Un **symétrique à droite** de x pour la loi $\star$ est un élément $x' \in E$ vérifiant : $x \star x' = e$.

(ii) Un **symétrique à gauche** de x pour la loi $\star$ est un élément $x' \in E$ vérifiant : $x' \star x = e$.

(iii) Un **symétrique** de x pour la loi $\star$ est un élément $x' \in E$ vérifiant : $x \star x' = x' \star x = e$.

On dit que x est **symétrisable** lorsqu'il admet un symétrique.

Proposition C2.7

Soit $(E, \star)$ un magma associatif unifère. Si un élément $x \in E$ possède un symétrique à droite y et un symétrique à gauche z, alors $y = z$ et x possède un unique symétrique $x' = y = z$.

Proposition C2.8

Soit $(E, \star)$ un magma associatif unifère et notons e son neutre.

(i) e est le symétrique de e.

(ii) Si un élément $x \in E$ a pour symétrique x', alors x' a pour symétrique x.

(iii) Soit $x, y \in E$ admettant pour symétriques respectifs x' et y'. Alors $x \star y$ admet pour symétrique $y' \star x'$.

1.4 Itérés d'un élément

Dans ce paragraphe, $(E, \star)$ désigne un magma associatif et unifère dont on note e l'élément neutre.

Définition C2.9

Soit $x \in E$.

(i) On définit par récurrence les **itérés** de x pour $n \in mN$:

$$\begin{cases} x^0 = e \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x^{n+1} = x^n \star x \end{cases}.$$

(ii) Si x admet un symétrique x', on définit les itérés de x pour n entier négatif par :

$$x^n = (x')^{-n}.$$

Proposition C2.10

Soit $x, y \in E$. Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

(i) $x^n \star x^m = x^{n+m}$,

(ii) $(x^n)^m = x^{nm}$,

(iii) si x et y commutent, alors x^n et y^m commutent et $(x^n \star y^n) = (x \star y)^n$.

Si x et/ou y admettent un symétrique, alors ces identités sont valables pour n et/ou m dans $\mathbb{Z}$.

Notations. Deux notations courantes : la notation multiplicative et la notation additive.

2 Groupes

2.1 Définitions et exemples

Définition C2.11

On dit qu'un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\star$ est un **groupe** lorsque

$\boxed{\textbf{A}}$ $\star$ est associative,

$\boxed{\textbf{N}}$ G contient un élément neutre pour la loi $\star$,

$\boxed{\textbf{S}}$ tout élément de G est symétrisable.

Lorsque de plus la loi $\star$ est commutative, on dit que le groupe $(G, \star)$ est **commutatif** (ou **abélien**).

Notation. Dans la suite, on adoptera la notation multiplicative. Notamment le symétrique de $x \in E$ sera noté x^{-1} et appelé inverse de x. On note en toute généralité e_G le neutre de G.

Théorème et définition C2.12

Soit E un ensemble non vide.

(i) On appelle **permutation** de E toute application bijective $\sigma : E \to E$ et on note S_E l'ensemble des permutations de E.

(ii) $(S_E, \circ)$ est un groupe appelé **groupe symétrique** ou **groupe des permutations** de E, noté S_E.

Remarque. $(S_E, \circ)$ n'est presque jamais un groupe abélien. Plus précisément, il l'est si et seulement si E contient au plus 2 éléments.

Notation. Dans le cas où $E = [\![1, n]\!]$, on note $S_n = S_{[\![1,n]\!]}$.

Proposition C2.13

Soit $n \in \mathbb{N}$. S_n est un groupe fini contenant $n!$ éléments.

Proposition et définition C2.14

Soit $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes. On munit l'ensemble $G_1 \times G_2$ de la loi $\otimes$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2,\ (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 \star_1 y_1, x_2 \star_2 y_2).$$

(i) $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe, appelé **groupe produit** de G_1 et G_2.

(ii) $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe abélien si et seulement si G_1 et G_2 sont abéliens.

Remarque. On peut étendre cette construction au produit cartésien de n groupes, dont le neutre sera le n-uplet des neutres des n groupes.

2.2 Sous-groupes

Définition C2.15

Soit $(G, \star)$ un groupe et $H \subset G$. On dit que H est un sous-groupe de G lorsque

- $e_G \in H$,
- H est stable par $\star$, *i.e.* $\forall x, y \in H,\ x \star y \in H$,
- H est stable par passage au symétrique, *i.e.* $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$.

Proposition et définition C2.16

Soit $(G,\star)$ un groupe et H un sous groupe de G.

(i) L'application $\begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & H \\ (x,y) & \longmapsto & x \star y \end{array}$ définit une loi de composition interne sur H appelée **loi induite** par $\star$ sur H, et souvent encore notée $\star$.

(ii) $(H,\star)$ est un groupe.

Proposition C2.17

Toute intersection d'une famille de sous-groupes de $(G,\star)$ est un sous-groupe de G

2.3 Morphismes de groupes

Définition C2.18

Soit $(G_1,\star_1)$ et $(G_2,\star_2)$ deux groupes. On appelle

- **morphisme de groupes** de G_1 dans G_2 toute application $\varphi : G_1 \to G_2$ vérifiant

$$\forall x, y \in G_1,\ \varphi(x \star_1 y) = \varphi(x) \star_2 \varphi(y),$$

- **isomorphisme** de groupes tout morphisme de groupes bijectif,
- **endomorphisme** de G_1 tout morphisme de G_1 dans lui-même,
- **automorphisme** de G_1 tout endomorphisme bijectif de G_1 dans lui-même.

On dit que G_1 et G_2 sont **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme de G_1 dans G_2.

Proposition C2.19

Soit $(G_1,\star_1)$ et $(G_2,\star_2)$ deux groupes (dont on note e_1 et e_2 les neutres respectifs) et $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes.

(i) $\varphi(e_1) = e_2$.

(ii) $\forall g \in G_1,\ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

(iii) $\forall g \in G_1, \forall n \in \mathbb{Z},\ \varphi(g^n) = \varphi(g)^n$.

Proposition C2.20

(i) La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.

(ii) La réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

Théorème C2.21

Soit $(G, \star)$ un groupe. L'ensemble des automorphismes de G, muni de la loi $\circ$, est un groupe, noté $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$.

2.4 Noyau, image d'un morphisme

Définition C2.22

Soit $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes (dont on note e_1 et e_2 les neutres respectifs) et $\varphi : G_1 \to G_2$. On appelle

(i) **image** de φ l'ensemble $\operatorname{Im} \varphi = \varphi(G_1) = \{\varphi(g) \mid g \in G_1\}$.

(ii) **noyau** de φ l'ensemble $\operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(\{e_2\}) = \{g \in G_1 \mid \varphi(g) = e_2\}$.

Proposition C2.23

Avec les notations précédentes,

(i) $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-groupe de G_2.

(ii) $\operatorname{Ker} \varphi$ est un sous-groupe de G_1.

Théorème C2.24

Avec les notations précédentes,

(i) φ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} \varphi = G_2$.

(ii) φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} \varphi = \{e_1\}$.

3 Anneaux et corps

3.1 Structure d'anneau

Définition C2.25

On dit qu'un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ est un **anneau** lorsque

$\boxed{\textbf{G}}$ $(A,+)$ est un groupe abélien,

$\boxed{\textbf{A}}$ la loi $\times$ est associative,

$\boxed{\textbf{N}}$ la loi $\times$ admet un élément neutre,

(A et N :) $(A,+,\times)$ est un magma associatif unifère

$\boxed{\textbf{D}}$ la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$.

Lorsque de plus la loi $\times$ est commutative, on dit que l'anneau $(A,+,\times)$ est **commutatif**.

Notations. Les éléments neutres seront notés respectivement 0_A et 1_A ou 0 et 1 s'il n'y a pas d'ambiguïté possible. On notera $-a$ le symétrique pour la loi $+$ d'un élément $a \in A$.

Proposition C2.26

Soit $(A,+,\times)$ un anneau, $a,b \in A$ et $n \in \mathbb{Z}$.

(i) $a \times 0_A = 0_A \times a = 0_A$,

(ii) $(-x) \times y = -(x \times y) = x \times (-y)$,

(iii) $(n \cdot x) \times y = n \cdot (x \times y) = x \times (n \cdot y)$.

Théorème C2.27

Soit $(A,+,\times)$ un anneau, $n \in \mathbb{N}$ et $a,b \in A$ tels que $a \times b = b \times a$.

(i) Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}.$$

(ii) Formule de Bernoulli :

$$a^n - b^n = (a-b) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \times b^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \times b^k \right) \times (a-b).$$

3.2 Sous-anneaux

Définition C2.28

Soit $(A,+,\times)$ un anneau et $B\subset A$. On dit que B est un **sous-anneau** de A lorsque

- $(B,+)$ est un sous-groupe de A,
- $1_A\in B$,
- B est stable par produit, *i.e.* $\forall x,y\in B,\ x\times y\in B$.

Remarque. Vérifier que $0_A\in B$ est superflu, c'est une conséquence de $1_A\in B$ et de la stabilité par différence.

Proposition C2.29

Soit $(A,+,\times)$ un anneau et B un sous-anneau de A. Muni des lois induites par $+$ et $\times$, B est alors un anneau.

3.3 Morphismes d'anneaux

Définition C2.30

Soit $(A,+,\times)$ et $(A',\oplus,\otimes)$ deux anneaux. On appelle **morphisme d'anneaux** de A dans A' toute application $f:A\to A'$ vérifiant

- $\forall a,b\in A,\ f(a+b)=f(a)\oplus f(b)$,
- $\forall a,b\in A,\ f(a\times b)=f(a)\otimes f(b)$,
- $f(1_A)=1_{A'}$.

Lorsque f est de plus bijective, on dit que f est un **isomorphisme** d'anneaux.

3.4 Anneau intègre

Définition C2.31

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On dit qu'un élément $a\in A$ est **inversible** lorsqu'il est symétrisable pour la loi $\times$, *i.e.* lorsque

$$\exists a'\in A,\ a\times a'=a'\times a=1_A.$$

Proposition et définition C2.32

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On note $U(A)$ ou $A^\times$ l'ensemble des inversibles de A. Alors $(U(A),\times)$ est un groupe, appelé **groupe des inversibles** de A.

Définition C2.33

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

(i) Un **diviseur de zéro** est un élément $a \in A$ non nul tel que

$$\exists b \in A \setminus \{0_A\},\, a \times b = 0_A.$$

(ii) A est dit **intègre** lorsqu'il est non nul et sans diviseur de zéro, *i.e.*

$$\forall a, b \in A,\, (a \times b = 0_A \Rightarrow a = 0_A \text{ ou } b = 0_A)\,.$$

Proposition C2.34

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre. Soit $a, x, y \in A$ tels que $a \neq 0_A$. Alors

$$a \times x = a \times y \Rightarrow x = y.$$

Définition C2.35

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit qu'un élément $a \in A$ est **nilpotent** lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0_A$. Dans ce cas, le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $a^n = 0_A$ est appelé **indice** ou **ordre de nilpotence** de a.

Théorème C2.36

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $a \in A$. Si a est nilpotent, alors $1_A - a$ est inversible et

$$(1_A - a)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

3.5 Structure de corps

Définition C2.37

On dit qu'un ensemble K muni de deux lois de composition internes $+$ et $\times$ est un **corps** lorsque

$\boxed{\mathbf{A}}$ $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0_K\}$,

$\boxed{\mathbf{I}}$ tout élément non nul de K est inversible.

Définition C2.38

Soit $(K, +, \times)$ un corps et $L \subset K$. On dit que L est un **sous-corps** de K lorsque

- $(L, +, \times)$ est un sous-anneau de K,
- L est stable par passage à l'inverse, *i.e.* $\forall x \in L \setminus \{0_K\}$, $x^{-1} \in L$.

Proposition C2.39

Soit $(K, +, \times)$ un corps et L un sous-corps de K. Muni des lois induites par $+$ et $\times$, L est alors un corps.

Chapitre C3

Arithmétique

Objectifs

- Diviseurs et multiples.
- Division euclidienne.
- PGCD, PPCM.
- Théorèmes d'arithmétique.
- Nombres premiers.

1 Outils de l'arithmétique

1.1 Divisibilité

Définition C3.1

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b, ou que a est **un diviseur** de b lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ b = ak.$$

On note alors $a \mid b$ et on dit que b est **divisible** par a, ou que b est **un multiple** de a

Notation. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On note $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de a.

Proposition C3.2

(i) La relation de divisibilité est une relation réflexive et transitive sur $\mathbb{Z}$.

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $(a \mid b \text{ et } b \mid a) \Leftrightarrow a = \pm b$.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a et b sont **associés** lorsqu'il existe $u \in \mathbb{Z}^\times$ tel que $a = ub$.

Notation. On note $a \sim b \Leftrightarrow a = \pm b$.

Proposition C3.3

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

(i) Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, $a \mid (\lambda b + \mu c)$.

(ii) Si $a \mid b$ et $c \mid d$, alors $ac \mid bd$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$, $a^k \mid b^k$

(iii) Si $ab \mid ac$ et $a \neq 0$, alors $b \mid c$.

1.2 Congruences

Définition C3.4

Soit $a, b, n \in \mathbb{Z}$. On dit que a est **congru à** b **modulo** n et on note $a \equiv b[n]$ lorsque n divise $a - b$. Autrement dit

$$a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + kn.$$

Notation. On note aussi $a \equiv b \mod n$ ou $a \equiv b \pmod n$.
Remarque. Soit $d, n \in \mathbb{Z}$. On a

$$d \mid n \Leftrightarrow n \equiv 0 \ [n].$$

Proposition C3.5

Soit $n \in \mathbb{Z}$. La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Proposition C3.6

Soit $a, a', b, b', n \in \mathbb{Z}$ et soit $m \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

(i) Si $a \equiv b \ [n]$ et $a' \equiv b' \ [n]$, alors $a + a' \equiv b + b' \ [n]$.

(ii) $a \equiv b \ [n] \Rightarrow ma \equiv mb \ [n]$.

(iii) Si $a \equiv b \ [n]$ et $a' \equiv b' \ [n]$, alors $aa' \equiv bb' \ [n]$ et $a^k \equiv b^k \ [n]$.

1.3 Division euclidienne

Théorème et définition C3.7

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b - 1.$$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** de a par b.

Proposition C3.8

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

2 PGCD, PPCM

2.1 Définition

Proposition et définition C3.9

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a = b = 0$, on note conventionnellement $a \wedge b = 0$. Sinon, l'ensemble des diviseurs communs à a et b possède un plus grand élément (pour la relation d'ordre $\leqslant$), noté $a \wedge b$.
L'entier $a \wedge b$ est appelé **plus grand commun diviseur** (**PGCD**) de a et b.

Proposition et définition C3.10

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a = 0$ ou $b = 0$, on note conventionnellement $a \vee b = 0$. Sinon, l'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b possède un plus petit élément (pour la relation d'ordre $\leqslant$), noté $a \vee b$.
L'entier $a \vee b$ est appelé **plus petit commun multiple** (**PPCM**) de a et b.

Proposition C3.11

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

(i) $a \wedge b \in \mathbb{N}$,

(ii) $(a \wedge b) \mid a$ et $(a \wedge b) \mid b$,

(iii) $a \wedge b = b \wedge a$,

(iv) $a \wedge 0 = |a|$,

(v) $a \vee b \in \mathbb{N}$,

(vi) $a \mid (a \vee b)$ et $b \mid (a \vee b)$,

(vii) $a \vee b = b \vee a$,

(viii) $a \vee 1 = |a|$.

2.2 Euclide, Bézout et Gauß

Théorème C3.12

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors

$$a \wedge b = r \wedge b.$$

Proposition C3.13 (Algorithme d'Euclide)

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
On pose $r_0 = |a|$, $r_1 = |b|$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_n \neq 0$, r_{n+1} le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n.
Il existe un plus petit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_N = 0$. Dans ce cas $r_{N-1} = a \wedge b$.

Théorème et définition C3.14 (Relation de Bézout)

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = a \wedge b.$$

Les entiers u et v sont appelés **coefficients de Bézout** de a et b.

Remarque. On peut étendre l'algorithme d'Euclide ci-dessus pour déterminer les nombres u et v. Avec les notations précédentes, posons également, pour tout $1 \leqslant n < N$, q_n le quotient dans la division euclidienne

$$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}.$$

On définit deux familles d'entiers $(\lambda_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ et $(\mu_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ par $(\lambda_0, \mu_0) = (1, 0)$, $(\lambda_1, \mu_1) = (0, 1)$ et

$$\forall 0 < n < N-1, \begin{cases} \lambda_{n+1} = \lambda_{n-1} - q_n \lambda_n \\ \mu_{n+1} = \mu_{n-1} - q_n \mu_n \end{cases}.$$

On a alors pour tout $n \in [\![0, n]\!]$: $\lambda_n a + \mu_n b = r_n$.
Comme $r_{N-1} = a \wedge b$, $(u, v) = (\lambda_{N-1}, \mu_{N-1})$ est un couple de coefficients de Bézout de a et b.
De plus, comme $r_N = 0$, on a $\lambda_N a + \mu_N b = 0$. Et alors $|\lambda_N a| = |\mu_N b| = a \vee b$.

Proposition C3.15

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

(i)
- $\forall d \in \mathbb{Z}$, $d \mid a$ et $d \mid b \Leftrightarrow d \mid (a \wedge b)$.
- Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$.
- $a \wedge b$ est le plus grand commun diviseur de a et b au sens de la divisibilité.

(ii)
- $\forall m \in \mathbb{Z}$, $a \mid m$ et $b \mid m \Leftrightarrow (a \vee b) \mid m$.
- Les multiples communs à a et b sont les multiples de $a \vee b$.
- $a \vee b$ est le plus petit commun multiple de a et b au sens de la divisibilité.

Proposition C3.16

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

(i) $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$,

(ii) $(ka) \vee (kb) = k(a \vee b)$.

Proposition C3.17

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $d = a \wedge b$. Il existe a', b' tels que

$$a = da',\ b = db' \text{ et } a' \wedge b' = 1.$$

Définition C3.18

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque $a \wedge b = 1$.

Remarque. La propriété précédente permet de définir la forme irréductible d'un nombre rationnel.

Théorème C3.19 (Bézout)

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1.$$

Corollaire C3.20

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(i) Si $a \wedge b = 1$ et $c \mid b$, alors $a \wedge c = 1$.

(ii) Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors $a \wedge (bc)$.

(iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \wedge b^k = (a \wedge b)^k$.

Théorème C3.21 (Gauß)

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid (bc)$ et $a \wedge b = 1$, alors $a \mid c$.

Corollaire C3.22

Soit $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$.

(i) Si $am \equiv bm\ [n]$ et $m \wedge n = 1$, alors $a \equiv b\ [n]$.

(ii) Si $a \mid n$, $b \mid n$ et $a \wedge b = 1$, alors $(ab) \mid n$.

Théorème C3.23

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

(i) Si $a \wedge b = 1$, alors $a \vee b = |ab|$.

(ii) $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

2.3 Cas d'une famille de nombres entiers

Proposition C3.24

$\wedge$ et $\vee$ sont des lois de composition internes commutatives et associatives sur $\mathbb{Z}$.

Définition C3.25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. On appelle **plus grand commun diviseur** (resp. **plus petit commun multiple**) de $a_1, \dots, a_n$ le nombre $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ (resp. $a_1 \vee \dots \vee a_n$).

Remarque. Cette définition ne dépend ni de l'ordre des nombres a_i ni de la manière de parenthéser l'expression.

Notation. On note $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} a_i$ (resp. $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} a_i$) avec la convention d'un PGCD nul et d'un PPCM égal à 1 si $n = 0$.

Théorème C3.26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

(i) Soit $d \in \mathbb{Z}$. $(\forall i \in [\![1, n]\!],\ d \mid a_i) \Leftrightarrow d \mid \left(\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right)$.

(ii) Soit $m \in \mathbb{Z}$. $(\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \mid m) \Leftrightarrow \left(\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} a_i\right) \mid m$.

Remarques. Par convention, si tous les a_i sont nuls, alors leur PGCD est 0 ; et si l'un des a_i est nul, alors leur PPCM est 0.
Sinon, à nouveau, les termes « plus grand » et « plus petit » dans PGCD et PPCM valent au sens de la relation de divisibilité ainsi qu'au sens de la relation d'ordre usuelle, pour les diviseurs et multiples positifs.

Définition C3.27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

(i) On dit que $a_1, \dots, a_n$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** lorsque $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = 1$.

(ii) On dit que $a_1, \dots, a_n$ sont **premiers entre eux deux à deux** lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ (i \neq j \Rightarrow a_i \wedge a_j = 1).$$

Proposition C3.28

Des entiers premiers entre eux deux à deux sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Théorème C3.29 (Bézout)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$.

(i) $\exists u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i a_i = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$.

(ii) $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = 1 \Leftrightarrow \exists u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{n} u_i a_i = 1$.

Théorème C3.30

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux dans leur ensemble. Alors

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i = \left| \prod_{i=1}^{n} a_i \right|.$$

3 Nombres premiers

3.1 Définition

Définition C3.31

Un **nombre premier** est un nombre entier $p \geqslant 2$ dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

Notation. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Proposition C3.32

(i) Soit $p \in \mathbb{P}$ et $a \in \mathbb{Z}$. On a $p \mid a$ ou $p \wedge a = 1$.

(ii) Deux nombres premiers sont soit égaux soit premiers entre eux.

(iii) Soit $p \in \mathbb{P}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $p \mid (ab)$, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Théorème C3.33

Il existe une infinité de nombres premiers.

Lemme C3.34

Soit $p \in \mathbb{P}$ et $k \in [\![0, p-1]\!]$. On a $p \mid \dbinom{p}{k}$.

Théorème C3.35 (Petit théorème de Fermat)

Soit $p \in \mathbb{P}$.

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n\ [p]$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n \wedge p = 1 \Rightarrow n^{p-1} \equiv 1\ [p])$.

3.2 Valuations p-adiques

Proposition et définition C3.36

Soit $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. L'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \text{ divise } n\right\}$ admet un plus grand élément, appelé **valuation p-adique** de n et noté $v_p(n)$.

Remarque. Par convention, $v_p(0) = +\infty$. Par ailleurs $v_p(n) = 0$ si et seulement si p ne divise pas n.

Proposition C3.37

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \mathbb{N}$.

(i) $v_p(n) \geqslant k \Leftrightarrow p^k \mid n \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = p^k m$.

(ii) $v_p(n) = k \Leftrightarrow (p^k \mid n \text{ et } p^{k+1} \nmid n) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ (n = p^k m \text{ et } p \wedge m = 1)$.

Proposition C3.38

Soit $p \in \mathbb{P}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$.

(i) Si $a \mid b$, alors $v_p(a) \leqslant v_p(b)$,

(ii) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,

(iii) $v_p(a+b) \geqslant \min(v_p(a), v_p(b))$, avec égalité si $v_p(a) = v_p(b)$.

Théorème C3.39

Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$ et une famille $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{P}}$ d'entiers naturels, à support fini, tels que

$$n = \varepsilon \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}.$$

De plus cette décomposition est unique : ε est le signe de n et $\forall p \in \mathbb{P}$, $\alpha_p = v_p(n)$.

Théorème C3.40

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors
$$a \mid b \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P},\ v_p(a) \leqslant v_p(b).$$

Proposition C3.41

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$.

(i) $v_p\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right) = \min\{v_p(a_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$,

(ii) $v_p\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\right) = \max\{v_p(a_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Méthodes

- Caractériser l'égalité de deux entiers par antisymétrie de la divisibilité.
- Utiliser les congruences modulo un entier.
- Déterminer PGCD, PPCM et coefficients de Bézout de deux entiers.
- Caractériser la coprimalité de deux entiers.
- Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

Chapitre C4

Polynômes

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Structure

1.1 Anneau des polynômes

Définition C4.1

On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang, *i.e.* telle que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\ a_k = 0.$$

Proposition et définition C4.2

Soit $P = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ et $Q = (b_0, \dots, b_n, 0, \dots)$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- la suite $(\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, noté $\lambda \cdot P$ ou λP ;
- la suite $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, noté $P + Q$ et appelé la **somme** de P et Q ;
- la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ c_k = \sum_{k=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

  est un polynôme, noté $P \times Q = (c_0, \dots, c_n, \dots)$ et appelé **produit** de P et Q.

Notations.

- On note 1 le polynôme $(1, 0, \dots)$.
- On note X le polynôme $(0, 1, 0, \dots)$.
- On note naturellement X^n le produit n fois de X par lui-même, qui donne

$$X^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ zéros}}, \underbrace{1}_{a_n}, 0, \dots).$$

- Avec ces notations, $P = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ sera noté

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P(X).$$

Proposition C4.3

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif dont le neutre pour $+$ est le polynôme nul $0 = (0)_{k\in\mathbb{N}}$ et le neutre pour $\times$ est polynôme $1 = (1, 0, 0, \ldots)$.

Définition C4.4

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. La **composition** des polynômes P et Q est le polynôme $P \circ Q$ défini par

$$(P \circ Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(X)^k.$$

Définition C4.5

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Alors on appelle

(i) **degré de** P l'entier n, noté $\deg(P)$. Autrement dit

$$\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}.$$

(ii) **terme dominant** de P le monôme $a_n X^n$ et **coefficient dominant** le coefficient a_n, que l'on notera $c_d(P)$,

(iii) polynôme **constant** un polynôme de degré 0,

(iv) **polynôme normalisé** ou **unitaire** un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

Remarque. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Notation. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Proposition C4.6

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $\deg(\lambda P) \leqslant P$,

(ii) si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ et $c_d(\lambda P) = \lambda c_d(P)$,

(iii) $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$,

(iv) si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$ et $c_d(P + Q) = c_d(P)$,

(v) $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$ et $c_d(PQ) = c_d(P) \times c_d(Q)$,

(vi) si $\deg(Q) \geqslant 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$.

Proposition C4.7

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$. Autrement dit, $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

Proposition C4.8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. P est inversible si et seulement si P est constant non nul.

1.2 Fonctions polynomiales

Définition C4.9

Étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on appelle **fonction polynomiale** associée à P la fonction

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{P} : \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \end{array}$$

Proposition et définition C4.10

L'application $\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_x : & \mathbb{K}[X] & \to & K \\ & P & \mapsto & \widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$ est un morphisme d'anneaux, vérifiant également

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{ev}_x(\lambda P) = \lambda\, \mathrm{ev}_x(P)$$

et appelé **morphisme d'évaluation en x**.

Définition C4.11 (Polynôme dérivé)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- On définit alors le **polynôme dérivé** de P par

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \ldots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

- On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ le **k-ième polynôme dérivé** par
  - ➢ $P^{(0)} = P$,
  - ➢ $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = \left[P^{(k)}\right]'$.

Proposition C4.12

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$.

(i) si $n > 0$, alors $\deg P' = \deg P - 1$ et $c_d(P') = n c_d(P)$,

(ii) P est constant si et seulement si $P' = 0$.

Remarque. Cette propriété sur le degré de P' ne se généralisera qu'à un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.

Proposition C4.13

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$;

(ii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a la formule de Leibniz :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Proposition C4.14 (Formule de Taylor)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

2 Arithmétique des polynômes

2.1 Division euclidienne

Définition C4.15 (Divisibilité)

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A **divise** B, ou que B est **divisible** par (ou **un diviseur**) de A, et on note $A \mid B$ s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = A \times Q$. On dit alors aussi que B est un **multiple** de A.

Proposition C4.16

Soit $A, B, C, D, U, V \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $B \neq 0$ et $A \mid B$, alors $\deg A \leqslant \deg B$.

(ii) Si $A \mid B$ et $A \mid C$, alors $A \mid (UB + VC)$.

(iii) Si $A \mid B$ et $C \mid D$, alors $AC \mid BD$.

(iv) Si $(AB) \mid (AC)$ et $A \neq 0$, alors $B \mid C$.

Proposition C4.17

La relation de divisibilité est réflexive et transitive.

Proposition et définition C4.18

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \mid B$ et $B \mid A$.

(ii) $A \mid B$ et $\deg A = \deg B$.

(iii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^{\times}$, $A = \lambda B$.

Dans ce cas on dit que A et B sont **associés** et on note $A \sim B$.

Théorème et définition C4.19 (Division euclidienne)

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, B étant différent du polynôme nul. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

- $A = BQ + R$,
- $\deg R < \deg B$.

On dit que Q est le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Remarque. C'est le degré qui joue ici le rôle d'indicateur de « stricte décroissance » du processus (variant de boucle dans l'algorithme d'Euclide notamment). Une telle fonction (valeur absolue sur $\mathbb{Z}$, deg sur $\mathbb{K}[X]$) s'appelle un **stathme euclidien**. Un anneau disposant d'une division euclidienne s'appelle un **anneau euclidien** et on peut y définir toutes les notions arithmétiques déjà vues sur $\mathbb{Z}$ et rappelées ici dans $\mathbb{K}[X]$.

2.2 PGCD, PPCM

Notation. Notons $\mathrm{Div}(A)$ l'ensemble des diviseurs d'un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ et plus généralement $\mathrm{Div}(A_1, \dots, A_n) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ P \mid A_i\}$.

Lemme C4.20

(i) Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Div}(A, 0) = \mathrm{Div}(A)$.

(ii) Si $A = BQ + R$, avec $A, B, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Div}(A, B) = \mathrm{Div}(B, R)$.

Proposition et définition C4.21

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Il existe $D \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Div}(A, B) = \mathrm{Div}(D)$. Un tel polynôme est appelé **un plus grand commun diviseur (PGCD)** de A et B.

(ii) Tous les PGCD de A et B sont associés.

(iii) Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, les PGCD de A et B sont les éléments de $\mathrm{Div}(A, B)$ de degré maximal. Parmi eux, un seul est unitaire, appelé **le PGCD** de A et B, noté $A \wedge B$.

(iv) Par convention, si $A = B = 0$, $A \wedge B = 0$.

Proposition et définition C4.22

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, tout multiple commun à A et B de degré minimal est appelé **un plus petit commun multiple** de A et B. Tous les PPCM de A et B sont associés. Parmi eux, un seul est unitaire, appelé **le PPCM** de A et B, noté $A \vee B$.

(ii) Par convention, si $A = B = 0$, $A \vee B = 0$.

Remarque. On importe du cas de $\mathbb{Z}$ les propriétés sur les PGCD et PPCM, ainsi que l'algorithme d'Euclide pour déterminer un PGCD. On étend également ces définitions au cas d'un nombre fini de polynômes.

Proposition C4.23

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$.

(i) $\forall D \in \mathbb{K}[X]$, $D \mid \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $D \mid A_i$.

(ii) $\forall M \in \mathbb{K}[X]$, $\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right) \mid M \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \mid M$.

2.3 Bézout

Théorème C4.24

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} A_i U_i = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$.

Proposition C4.25

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$ et B un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$.

(i) $\bigwedge_{i=1}^{n} (BA_i) = B \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right)$.

(ii) si $n \neq 0$, alors $\bigvee_{i=1}^{n} (BA_i) = B \left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Définition C4.26

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont **premiers entre eux** lorsque $A \wedge B = 1$.

Définition C4.27

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$.

(i) On dit que les $A_1, \dots, A_n$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** lorsque

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1.$$

(ii) On dit que les $A_1, \dots, A_n$ sont **premiers entre eux deux à deux** lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow A_i \wedge A_j = 1.$$

Théorème C4.28 (Bézout)

(i) Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. $A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

(ii) $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1 \Leftrightarrow \exists U_1, \dots, U_n, \sum_{i=1}^{n} A_i U_i = 1.$

Proposition C4.29

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \wedge B = 1$ et $C \mid B$, alors $A \wedge C = 1$.

(ii) Si $A \wedge B = 1$ et $A \wedge C = 1$, alors $A \wedge (BC) = 1$.

(iii) Si $A \wedge B = 1$, alors $\forall p, q \in \mathbb{N},\ A^p \wedge B^q = 1$.

2.4 Gauß

Théorème C4.30 (Gauß)

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$(A \mid BC \text{ et } A \wedge B = 1) \Rightarrow A \mid C$$

Théorème C4.31

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \wedge B = 1$, alors $A \vee B = AB$.

(ii) $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.

3 Racines d'un polynôme

3.1 Racines

Définition C4.32

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** ou un **zéro** de P si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.

Théorème C4.33

(i) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$\alpha \text{ est une racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (X-\alpha) | P.$$

(ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Alors

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ sont racines de } P \quad \Leftrightarrow \quad \left(\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)\right) | P.$$

Corollaire C4.34

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines.

(ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n et c_n son coefficients dominant. Si P admet deux racines deux à deux distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors

$$P(X) = c_n \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i).$$

(iii) Tout polynôme de degré n qui admet au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

(iv) Soit $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Si $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

Remarque. Ceci montre la bijectivité de la correspondance entre polynômes et fonctions polynomiales $P \mapsto \widetilde{P}$. Ce résultat est généralisable avec $\mathbb{K}$ un corps quelconque, dès que ce dernier est infini.

3.2 Racines multiples

Définition C4.35 (Racines multiples)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) On appelle **ordre de multiplicité** de α en tant que racine de P l'entier $\nu_\alpha(P)$ défini par

$$\nu_\alpha(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid (X-\alpha)^k \mid P\}.$$

(ii) Une racine d'ordre 1 est une **racine simple**

(iii) Une racine d'ordre strictement supérieur à 1 est une **racine multiple**.

Proposition C4.36

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $\nu_\alpha(P) \geqslant p$ si et seulement si $(X-\alpha)^p \mid Q$.

Proposition C4.37

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\nu_\alpha(P) = p$,

(ii) $(X-\alpha)^p \mid P$ et $(X-\alpha)^p \nmid P$,

(iii) il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

- $P = (X-\alpha)^p Q$,
- $Q(\alpha) \neq 0$.

Théorème C4.38 (Caractérisation de la multiplicité d'une racine)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) $\nu_\alpha(P) \geqslant p$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0$.

(ii) $\nu_\alpha(P) = p$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(p)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque. Cette caractérisation, comme les précédents résultats sur les polynômes dérivés, ne s'étend qu'aux corps de caractéristique nulle.

Proposition C4.39

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\nu_\alpha(P) \geqslant 1$, alors $\nu_\alpha(P') = \nu_\alpha(P) - 1$.

(ii) si $P \mid Q$, alors $\nu_\alpha(P) \leqslant \nu_\alpha(Q)$,

(iii) $\nu_\alpha(PQ) = \nu_\alpha(P) + \nu_\alpha(Q)$,

(iv) $\nu_\alpha(P+Q) \geqslant \min\{\nu_\alpha(P), \nu_\alpha(Q)\}$ avec égalité si $\nu_\alpha(P) \neq \nu_\alpha(Q)$.

Théorème C4.40

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments distinct de $\mathbb{K}$ et $\nu_1, \ldots \nu_r \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i est une racine de multiplicité ν_i de P.

(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = \left(\prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{\nu_i}\right) Q(X) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, r]\!],\ Q(\alpha_i) \neq 0.$$

Corollaire C4.41

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P, comptées avec multiplicités, est inférieur ou égal à n. Autrement dit, si pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, α_i est une racine de multiplicité ν_i de P, alors

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_i \leqslant n.$$

4 Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition C4.42

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on note a_n son coefficient dominant. On dit que P est **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il existe des scalaires $\alpha_k \in \mathbb{K}$ (pas nécessairement distincts) tels que

$$P = a_n (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k).$$

Définition C4.43 (irréductibilité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On dit que P est irréductible si

$$P = AB \Rightarrow A \in \mathbb{K} \text{ ou } B \in \mathbb{K}.$$

Proposition C4.44

Les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème C4.45 (Décomposition en produit d'irréductibles)

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et m polynômes $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles et unitaires tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{m} P_k.$$

De plus α et l'ensemble des P_k sont uniques.

4.1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème C4.46 (d'Alembert-Gauß)

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème C4.47 (d'Alembert-Gauß)

Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Corollaire C4.48

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme

$$P = a_n(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n),$$

où les scalaires α_k sont les racines de P comptées avec multiplicités, et a_n son coefficient dominant.

Corollaire C4.49

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines complexes. Alors

(i) $a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$,

(ii) $a_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$,

Théorème C4.50 (Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$)

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leurs multiplicités.

Théorème C4.51

Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$. Alors
$$A \mid B \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \nu_\alpha(A) \leqslant \nu_\alpha(B).$$

Proposition C4.52

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}).$$

4.2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème C4.53

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Théorème C4.54 (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors P peut s'écrire sous la forme

$$P = a \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k) \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + b_\ell X + c_\ell),$$

avec

- $a \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de P,
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles de P, non nécessairement distinctes,
- $(b_1, c_1), \ldots, (b_s, c_s) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant s$, on ait $\Delta_\ell = b_\ell^2 - 4c_\ell < 0$.

Chapitre C5

Fractions rationnelles

Objectifs

- Saisir la construction du corps des fractions rationnelles.
- Savoir calculer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque (en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Construction

Théorème et définition C5.1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{K}(X)$ et une application surjective $\varphi : \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{K}(X)$ telle que pour tous couples $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$,

$$\varphi(A, B) = \varphi(C, D) \Leftrightarrow AD = BC.$$

Un élément $F = \varphi(A, B) \in \mathbb{K}(X)$ est appelé **fraction rationnelle à coefficients dans** $\mathbb{K}$ et noté $\dfrac{A}{B}$.

Définition et proposition C5.2

Soit $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$. Les opérations

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

définissent deux lois de composition internes sur $\mathbb{K}(X)$ et font de $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ un corps, où $0_{\mathbb{K}(X)} = \dfrac{0}{1}$ et $1_{\mathbb{K}(X)} = \dfrac{1}{1}$.

Remarque. Il s'agit notamment de vérifier que ces définitions ne dépendent pas du représentant choisi : pour $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $F + G$ et $F \times G$ donnent le même résultat quels que soient les polynômes A, B, C, D

choisis pour représenter $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$.

Proposition C5.3

L'application $P \mapsto \dfrac{P}{1}$ est un morphisme injectif d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Remarque. Cela permet d'identifier tout polynôme P à la fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$, faisant de $\mathbb{K}[X]$ une partie, et même un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

Dans toute la suite, l'écriture $\dfrac{A}{B}$ sous-entend que $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.

Proposition C5.4

L'opération définit par $\lambda \cdot \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lambda A}{B}$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{K}(X)$ qui fait de $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Proposition et définition C5.5

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que $A \wedge B = 1$ et B soit unitaire. La fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$ est appelée **le représentant irréductible** (ou **la forme irréductible**) de F.

Remarque. On parle d'un représentant irréductible (ou de fraction irréductible) dès que $A \wedge B = 1$, mais seul le fait que B soit scindé garantit l'unicité et justifie l'emploi de l'article défini.

2 Outils

Proposition et définition C5.6

Pour tout $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, la fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$ ne dépend pas du choix de (A, B) et s'appelle **dérivée de** F, notée F'.

Proposition C5.7

Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

(i) $(F+G)' = F' + G'$,

(ii) $(\lambda \cdot F)' = \lambda \cdot F'$,

(iii) $(FG)' = F'G + FG'$,

(iv) si $G \neq 0_{\mathbb{K}(X)}$, alors $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{F'G - FG'}{G^2}$,

(v) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P' = \left(\dfrac{P}{1}\right)'$.

Proposition et définition C5.8

Pour tout $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, la quantité $\deg A - \deg B$ ne dépend pas du choix de (A, B) et s'appelle **degré de** F, que l'on note $\deg F$.

Proposition C5.9

Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

(i) $\deg(F + G) \leqslant \max\{\deg F, \deg G\}$,

(ii) $\deg(\lambda \cdot F) = \begin{cases} \deg F \text{ si } \lambda \neq 0, \\ -\infty \text{ si } \lambda = 0, \end{cases}$

(iii) $\deg(FG) = \deg F + \deg G$,

(iv) si $G \neq 0$, alors $\deg\left(\dfrac{F}{G}\right) = \deg F - \deg G$.

Proposition et définition C5.10

Pour tout $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ irréductible, la fonction $x \mapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$, définie sur $\mathbb{K}$ privé des racines de B, ne dépend pas du choix de (A, B) et s'appelle **fonction rationnelle associée à** F, que l'on notera encore F.

Proposition et définition C5.11

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. La quantité $\nu_\alpha(F) = \nu_\alpha(A) - \nu_\alpha(B)$ ne dépend pas du choix de (A, B). On l'appelle **multiplicité de** α en tant que racine de F.

- Si $\nu_\alpha(F) > 0$, on dit que α est une **racine** de F.
- Si $\nu_\alpha(F) < 0$, on dit que α est un **pôle** de F.

Proposition C5.12

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ avec $A \wedge B = 1$.

- Les racines de F sont les racines de A (avec même multiplicité).
- Les pôles de F sont les racines de B (avec même multiplicité).

Proposition et définition C5.13

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que $F = E + G$ et $\deg G < 0$. Le polynôme E est le quotient de la division euclidienne de A par B est s'appelle **partie entière de** F.

3 Décomposition en éléments simples

Définition C5.14

On appelle **élément simple** de $\mathbb{K}(X)$ toute fraction rationnelle de la forme $\dfrac{A}{B^n}$ avec B polynôme irréductible unitaire, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg A < \deg B$.

Proposition C5.15

Soit $F = \dfrac{A}{B_1 B_2} \in \mathbb{K}(X)$ avec $\deg F < 0$ et $B_1 \wedge B_2 = 1$. Alors il existe $A_1, A_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $F = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$ et $\forall i \in \{1, 2\}$, $\deg A_i < \deg B_i$.

Proposition C5.16

Soit $F = \dfrac{A}{B^n} \in \mathbb{K}(X)$ avec $\deg F < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{B^k}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\deg A_k < \deg B$.

Remarque. Après identification de sa partie entière, l'application de ces deux propriétés, avec la décomposition du polynôme B de $\mathbb{K}[X]$ en produit d'irréductibles, permet d'établir l'existence et l'unicité de la décomposition de toute fraction rationnelle en éléments simples.

Théorème C5.17 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$)

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ de partie entière E et de pôles distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, de multiplicités respectives $\nu_1, \ldots, \nu_r$. Alors il existe un unique famille $(\lambda_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant k \leqslant \nu_i}} \subset \mathbb{C}$ telle que

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu_i} \frac{\lambda_{ik}}{(X - \alpha_i)^k}$$

Théorème C5.18 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$)

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ de partie entière E. On écrit la décomposition de B en produit d'irréductibles (avec les notations évidentes) :

$$B = \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{\nu_i} \prod_{j=1}^{r}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{\mu_j}.$$

Alors il existe des uniques familles $(a_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant k\leqslant \nu_i}} \subset \mathbb{C}$, $(b_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ 1\leqslant k\leqslant \mu_j}} \subset \mathbb{C}$ et $(c_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ 1\leqslant k\leqslant \mu_j}} \subset \mathbb{C}$ telles que

$$F = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_i} \frac{a_{ik}}{(X-\alpha_j)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{jk}X + c_{jk}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^k}.$$

Remarque. Dans les deux cas, la partie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\nu_i} \frac{a_{ik}}{(X-\alpha_j)^k}$ s'appelle **partie polaire** de F associée au pôle α_i.

Théorème et définition C5.19 (Partie polaire associée à un pôle simple)

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F. Si on note $\frac{\lambda}{X-\alpha}$ la partie polaire de F associée à α, alors

(i) $\lambda = ((X-\alpha)F(X))\,|_{X=\alpha}$ (l'évaluation en α de $(X-\alpha)F(X)$).

(ii) $\lambda = \dfrac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$.

En particulier, $\lambda \in \mathbb{K}^{\times}$. On l'appelle **résidu** de F en α.

Théorème C5.20 (Décomposition en éléments simples de P'/P)

Soit $P \in \mathbb{C}(X)$, $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ ses racines et $(\nu_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ leurs multiplicités respectives. Alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, le résidu de $\dfrac{P'}{P}$ en α_i est ν_i. Autrement dit

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i}{X-\alpha_i}.$$

Méthodes

- Déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle.
- Déterminer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle
  - ➢ en calculant les résidus,
  - ➢ à l'aide d'évaluations,
  - ➢ par division euclidienne,
  - ➢ par un calcul de limites,
  - ➢ à l'aide de la parité,
  - ➢ à l'aide de la conjugaison complexe.

Chapitre C6

Groupe symétrique

Objectifs

- Décomposition d'une permutation.
- Structure des petits groupes symétriques.

Dans tout le chapitre et sauf mention contraire, E désigne un ensemble et n un entier naturel.

1 Outils fondamentaux

1.1 Groupe symétrique

Définition et proposition C6.1

(i) On appelle **permutation** de E toute bijection $\sigma : E \to E$.

(ii) L'ensemble des permutations de E, muni de la loi de composition, est un groupe, appelé **groupe des permutations de** E.

(iii) Si E est de cardinal fini n, alors son groupe des permutations est de cardinal $n!$.

Notation. On note S_E (ou parfois $\mathfrak{S}_E$) le groupe des permutations de E.

Définition C6.2

On appelle **groupe symétrique d'ordre** n et on note S_n le groupe $S_{[\![1,n]\!]}$ des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

Notation. Une permutation $\sigma \in S_n$ se note $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

1.2 Ordre d'un élément dans un groupe

Définition C6.3

Soit $(G, \times)$ un groupe, e son neutre et $g \in G$.

(i) On dit que g est **d'ordre fini** lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$.

(ii) Si g est d'ordre fini, on appelle **ordre de** g le nombre $\min\{n \in \mathbb{N}^* \mid g^n = e\}$.

Proposition C6.4

Soit $(G, \times)$ un groupe, e son neutre et $g \in G$ un élément d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$.

(i) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $g^n = e \Leftrightarrow d \mid n$.

(ii) Soit $m, n \in \mathbb{Z}$. Alors $g^m = g^n \Leftrightarrow m \equiv n\ [d]$.

Définition et proposition C6.5

Soit $(G, \times)$ un groupe et $X \subset G$. On appelle **sous-groupe engendré par** X (et ces deux définitions sont équivalentes)

(i) l'intersection de tous les sous-groupes contenant X,

(ii) le plus petit sous-groupe contenant X.

Définition et proposition C6.6

Soit $(G, \times)$ un groupe et $g \in G$. On appelle **sous-groupe engendré par** g le sous-groupe de G engendré par $\{g\}$.

(i) Le sous-groupe engendré par g est $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) Si g est d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$, alors le sous-groupe engendré par g est $\{g^n \mid n \in [\![0, d-1]\!]\}$ et est de cardinal d.

2 Représentations d'une permutation

2.1 Support

Définition C6.7

Soit $\sigma \in S_E$. On appelle support de σ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas fixes par σ, *i.e.*

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x \in E \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

Proposition C6.8

Soit $\sigma \in S_E$. Alors $\mathrm{Supp}(\sigma)$ est stable par σ.

Proposition C6.9

Soit σ_1, σ_2 deux permutations de E à supports disjoints.

(i) $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

(ii) $\mathrm{Supp}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{Supp}(\sigma_1) \cup \mathrm{Supp}(\sigma_2)$.

2.2 Cycles

Définition C6.10

Soit $p \geqslant 2$ et $x_1, \ldots, x_p \in E$ deux à deux distincts. On note $\gamma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_p \end{pmatrix}$ la permutation de E définie par

$$x \mapsto \begin{cases} x_{i+1} \text{ si } x = x_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant p-1 \\ x_1 \text{ si } x = x_p \\ x \text{ sinon.} \end{cases}$$

Une telle permutation est appelée p-**cycle** ou **cycle de longueur** p.

Définition C6.11

(i) Un 2-cycle est appelé **transposition**.

(ii) Un cycle de longueur $n = \mathrm{Card}(E)$ est appelé une **permutation circulaire**.

Proposition C6.12

Soit $p \geqslant 2$. Un p-cycle est un élément d'ordre p de S_E.

2.3 Décompositions d'une permutation

On suppose dans ce paragraphe que E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème C6.13

Toute permutation de E peut se décomposer en produit de cycles à supports deux à deux disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre près des cycles.

Théorème C6.14

(i) Soit $p \geqslant 2$. Tout p-cycle est produit de $p-1$ transpositions.

(ii) Toute permutation de E est produit d'au plus $n-1$ transpositions.

S_E est engendré par les transpositions.

3 Signature d'une permutation

On se place ici dans le cas où $E = [\![1, n]\!]$.

Définition C6.15

Soit $\sigma \in S_n$.

(i) On dit qu'un couple (i, j) est une **inversion** de σ lorsque $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

(ii) Soit $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ. On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

(iii) On dit qu'une permutation σ est **paire** lorsque $\varepsilon(\sigma) = +1$ et **impaire** lorsque $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Lemme C6.16

Soit $\sigma \in S_n$.

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{(i,j) \in \mathcal{P}_2([\![1,n]\!])} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Théorème C6.17

L'application $\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes.

Proposition C6.18

(i) Soit τ une transposition. Alors $\varepsilon(\tau) = -1$.

(ii) Soit γ un p-cycle. Alors $\varepsilon(\gamma) = (-1)^{p-1}$.

Théorème C6.19

Le morphisme signature est l'unique morphisme de groupes non trivial de S_n dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

Définition C6.20

On appelle **groupe alterné** le groupe des permutations de signature 1. On note

$$A_n = \operatorname{Ker} \varepsilon = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

Proposition C6.21

Soit $n \geqslant 2$. Alors $\operatorname{Card}(A_n) = \dfrac{n!}{2}$.

Méthodes

- Savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
- Savoir décomposer une permutation en produit de transpositions.

Quatrième partie

De algebra lineari

Chapitre D1

Systèmes linéaires

Objectifs

- Résoudre un système linéaire dans toutes les configurations.
- Appréhender la notion de matrice associée à un système.
- Mettre en place un algorithme de réduction d'une matrice et de résolution du système associé.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions

Définition D1.1

On appelle **système d'équations linéaires** un système du type

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- Pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, les scalaires a_{ij} sont les **coefficients** du système.
- Les scalaires b_i pour $i \in [\![1,n]\!]$ forment le **second membre**. Lorsque tous les b_i sont nuls, on parle de **système homogène**
- Les x_j pour $j \in [\![1,p]\!]$ sont les **inconnues** du système.

Définition D1.2

Avec les notations ci-dessus, on appelle **solution** du système (S) tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ telles que toutes les équations de (S) soient vérifiées.

- Un système admettant au moins une solution est dit **compatible**.
- Un système n'admettant aucune solution est dit **incompatible**.

2 Matrices

Définition D1.3

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes une application

$$\begin{array}{rccl} A : & [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \to & \mathbb{K} \quad . \\ & (i,j) & \mapsto & a_{i,j} \end{array}$$

Remarque. Il s'agit simplement d'une famille de nombre indexée par deux indices

Notations. Une matrice se note

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phantom{a_{1,1}} & \text{colonne } j & \phantom{a_{1,p}} \end{array} \\ \text{ligne } i & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

On dit qu'elle est de taille $n \times p$ ou (n, p).

Le coefficient en place (i, j) se note $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notations. Le système d'équations défini dans le premier paragraphe peut être représenté par la matrice $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, appelée **matrice des coefficients** ou **matrice du système**. Le second membre se note comme la matrice colonne $B = [b_i]_{i\in[\![1,n]\!]}$. On note alors le système complet de la manière suivante, appelée **matrice augmentée** du système.

$$(S)\quad\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

3 Résolution d'un système

Définition et proposition D1.4

Étant donnés $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système linéaire (ou de sa matrice augmentée) une des opérations suivantes :

- **transvection** (addition d'une ligne à une autre ligne) : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$,
- **dilatation** (multiplication d'une ligne par un scalaire) : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
- **transposition** (échange de deux lignes) : $L_i \leftrightarrow L_j$.

Définition D1.5

(i) Deux systèmes linéaires sont dites **équivalents** par lignes lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

(ii) Deux matrices sont dites **équivalentes** par lignes lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

Proposition D1.6

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'équivalence par lignes est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition D1.7

Un système ou une matrice est dite **échelonnée** lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes.

(i) Si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes le sont aussi.

(ii) À partir de la deuxième ligne non nulle, le premier coefficient non nul est situé plus à droite que celui de la ligne précédente.

Ces coefficients ainsi que le premier de la première ligne, sont appelés les **pivots** du système ou de la matrice.

Théorème D1.8 (Gauß)

Toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée.

Remarque. La démonstration de ce théorème est constructive et fournit un algorithme pour réaliser cette opération en pratique, également connu sous le nom d'algorithme de Gauß. Si l'on excepte le cas particulier où la première colonne est nul, le principe de cet algorithme est le suivant.

- Permuter les lignes de manière à obtenir un coefficient supérieur gauche (**pivot**) $a_{1,1}$ non nul.
- Pour tout $j \geqslant 2$ on annule le premier coefficient $a_{j,1}$ de la ligne L_j en effectuant

$$L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}} L_1$$

Pour la suite, on ne modifie plus L_1 et on réitère ces opérations avec le système formé par toutes les autres lignes (qui a également une colonne de moins). Enfin le processus s'arrête lorsqu'on a obtenu un système échelonné.

Définition D1.9

On appelle **rang** d'un système ou d'une matrice le nombre de pivots d'un système ou d'une matrice échelonnée qui lui est équivalents par lignes.

Remarque. Pour un système $n \times p$ compatible de rang r, on peut déterminer r **inconnues principales**, associées aux pivots, et les $p - r$ autres, les **inconnues secondaires**. Chaque choix de valeurs fixées pour ces dernières détermine une unique solution.

Définition D1.10

(i) Un système $p \times p$ de rang p échelonné est appelé **triangulaire**. Il en est de même pour sa matrice.

(ii) Un système équivalent à un système triangulaire est dit **de Cramer**.

Proposition D1.11

Un système de Cramer admet une unique solution.

Méthodes

- Résolution de systèmes linéaires et expression des solutions par pivot de Gauß.
- Réduction d'une matrice à une matrice échelonnée équivalente, détermination du rang.

Chapitre D2

Calcul matriciel

Objectifs

- Opérations matricielles, cas du produit.
- Spécificités de l'anneau des matrices carrées.
- Matrices et sous-ensembles remarquables.
- Calculs de puissances de matrices.
- Question de l'inversibilité.

Dans tout le chapitre, en l'absence de précisions, $\mathbb{K}$ désigne un corps et n, p, q des entiers naturels non nuls.

1 Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1 Notations et premières opérations

Définition D2.1

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes une application

$$\begin{array}{rcl} A : \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket & \to & \mathbb{K} \\ (i, j) & \mapsto & a_{i,j} \end{array} .$$

Notations. On rappelle la notation sous forme de tableau.

$$\begin{array}{cc} & \text{colonne } j \\ \text{ligne } i & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

On dit qu'elle est de taille $n \times p$ ou (n, p).

Le coefficient en place (i, j) se note $[A]_{i,j}$.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition D2.2

(i) Les matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelées **matrices colonnes** de taille n.

(ii) Les matrices de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelées **matrices lignes** de taille p.

(iii) Les matrices de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont appelées **matrices carrées** de taille n. On note alors $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Remarque. On identifie souvent $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (mais on évite de le faire avec les matrices lignes).

Définition D2.3

On définit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les opérations suivantes :

- l'addition de $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$:

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ [A + B]_{i,j} = a_{ij} + b_{ij},$$

- la multiplication de $A = (a_{ij})$ par $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda a_{ij}$$

Définition D2.4

On appelle **matrice nulle** de taille $n \times p$ la matrice M dont tous les coefficients sont nuls, *i.e.* telle que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $[M]_{i,j} = 0$. On la note $0_{n,p}$, ou 0_n dans le cas d'une matrice carrée (où $n = p$). En l'absence d'ambiguïté, on la note simplement 0.

Définition D2.5 (Symbole de Kronecker)

Étant donnés $i, j \in \mathbb{N}$, on appelle **symbole de Kronecker** le nombre

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Définition D2.6

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on définit la **matrice élémentaire** E_{ij} par

$$\forall (k, l) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ [E_{ij}]_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \text{ et } l = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit,

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & \text{colonne } j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \longleftarrow \text{ligne } i \\ \\ \end{array} \end{array}$$

1.2 Produit matriciel

Définition D2.7 (Produit matriciel)

Étant données $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ deux matrices, on définit le produit $C = AB \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}.$$

Proposition D2.8

Le produit de deux matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donne :

$$\forall i, j, k, l \in [\![1, n]\!],\ E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}.$$

Définition D2.9

(i) On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée M telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0).$$

(ii) On appelle **matrice identité** de taille n la matrice $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Notation. La matrice diagonale $\begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ est notée $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

Proposition D2.10

Lorsqu'il est possible, le produit matriciel

- est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme,
- est associatif,
- admet la matrice identité pour élément neutre.

En particulier, $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif dont les neutres sont 0_n pour l'addition et I_n pour la multiplication.

Remarque. Attention le produit matriciel n'est pas commutatif et admet des diviseurs de zéro.
Notation. On note A^k le produit de k matrices toutes égales à A.
Remarque. Par convention, $A^0 = I_n$.

Proposition D2.11

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

(i) $(AB)^p = A^p B^p$,

(ii) $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

1.3 Transposée

Définition D2.12

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la **transposée** de A, notée $A^\intercal \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ [A^\intercal]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

Proposition D2.13

La transposition est linéaire, involutive et contravariante.

Définition D2.14

(i) On appelle **matrice symétrique** toute matrice carrée A qui vérifie $A^\intercal = A$.
(ii) On appelle **matrice antisymétrique** toute matrice carrée A qui vérifie $A^\intercal = -A$.

Notations. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de taille n.

Définition D2.15

(i) On appelle **matrice triangulaire supérieure** toute matrice carrée M telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i > j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0).$$

(ii) On appelle **matrice triangulaire inférieure** toute matrice carrée M telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i < j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0).$$

Proposition D2.16

Les parties suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont stables par produit : l'ensemble des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures, des matrices triangulaires inférieures.

1.4 Trace d'une matrice

Définition D2.17

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ le scalaire

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition D2.18

(i) La trace est une forme linéaire.
(ii) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2 Matrices inversibles

2.1 Groupe linéaire

Définition D2.19

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B est alors unique, notée A^{-1} et appelée **inverse** de A.

Notations. On appelle groupe linéaire, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices inversibles de taille n.

Proposition D2.20

$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe non abélien.

Proposition D2.21

Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors
- A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$,
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- $A^\intercal$ est inversible et $(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal$.

Proposition D2.22

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Alors
(i) T est inversible si et seulement si $\forall 0 \leqslant i \leqslant n$, $[T]_{i,i} \neq 0$.
(ii) Dans ce cas T^{-1} est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) et ses coefficients diagonaux sont $\forall 0 \leqslant i \leqslant n$, $[T^{-1}]_{i,i} = ([T]_{i,j})^{-1}$.

Proposition D2.23

Soit $D\,\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors
(i) D est inversible si et seulement si $\forall 0 \leqslant i \leqslant n$, $d_i \neq 0$.
(ii) Dans ce cas $D^{-1} = \mathrm{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1})$.

2.2 Rang et systèmes linéaires

Définition D2.24

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est **équivalente à** B lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

Proposition D2.25

L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition et définition D2.26

La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang $r \in [\![0, r]\!]$ si et seulement si elle est équivalente à la matrice J_r définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ [J_r]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \leqslant r \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad , \quad i.e. \quad J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_r \end{array}\right).$$

Définition et proposition D2.27

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une des opérations suivantes :

- multiplication d'une ligne par un scalaire (dilatation),
- addition d'une ligne à une autre ligne (avec un éventuel coefficient multiplicateur : transvection),
- échange de deux lignes.

Ces opérations correspondent à la multiplication à gauche par une matrice inversible du type :

1. $I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ (matrice de **dilatation**),
2. $I_n + \lambda E_{ij}$ (matrice de **transvection**),
3. $I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Les matrices des trois types ci-dessus sont inversibles.

Théorème D2.28

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) A est inversible.

(ii) $\operatorname{rg} A = n$.

(iii) A est équivalente par lignes à I_n.

(iv) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

(v) Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

Méthodes

- Calcul des puissances d'une matrice
  - ➢ par récurrence,
  - ➢ à l'aide du binôme de Newton,
  - ➢ à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Test d'inversibilité et calcul d'inverse
  - ➢ par calcul du rang,
  - ➢ en résolvant un système,
  - ➢ par l'algorithme de Gauß-Jordan,
  - ➢ à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Calcul et caractérisation du rang.

Chapitre D3

Espaces vectoriels

Objectifs

- Notions d'espace vectoriel, de sous-espace vectoriel (sev).
- Éléments constitutifs d'un sev (vecteurs, famille génératrice).
- Relations entre sev (inclusion, supplémentarité).
- Notion d'application linéaire.
- Éléments caractéristiques d'un morphisme (noyau, image).
- Applications linéaires particulières.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque, le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et premières propriétés

Définition D3.1

Soit E un ensemble. Une **loi de composition externe** sur E est une application « $\cdot$ »

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times E & \to & E \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}.$$

Définition D3.2 (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée $\cdot$. On dit que E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**) lorsque

(i) $(E,+)$ est un **groupe commutatif**, c'est-à-dire :

- **(N)➢** la loi $+$ admet un **élément neutre** dans E, noté 0_E,
- **(A)➢** la loi $+$ est **associative**,
- **(S)➢** tout $u \in E$ admet un **symétrique** par $+$, noté $-u$,
- **(C)➢** la loi $+$ est **commutative**.

(ii) la loi $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :

- **(A')➢** $\forall u \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$,
- **(N')➢** $\forall u \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$,
- **(D1)➢** $\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$,
- **(D2)➢** $\forall u \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.

Définition D3.3

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel E, les éléments de E sont appelés des **vecteurs** de E ; l'élément 0_E est appelé **vecteur nul**. $\mathbb{K}$ est appelé **corps de base** de E et ses éléments sont appelés des **scalaires**.

Notation. Pour tous $u, v \in E$, on note $u - v = u + (-v)$.

Proposition D3.4

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$, (ii) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$, (iii) $-u = (-1) \cdot u$.

Dém. D3.4

(i)
$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_E && (N) \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + (u + (-u)) && (S) \\ &= (0_{\mathbb{K}} \cdot u + u) + (-u) && (A) \\ &= (0_{\mathbb{K}} \cdot u + 1 \cdot u) + (-u) && (N') \\ &= (0_{\mathbb{K}} + 1) \cdot u + (-u) && (D2) \\ &= 1 \cdot u + (-u) \\ &= u + (-u) && (N') \\ &= 0_E && (S) \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) && (N) \\ &= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E && (D1) \end{aligned}$$
donc (en ajoutant des deux côtés le symétrique de $\lambda \cdot 0_E$) : $0_E = \lambda \cdot 0_E$.

(iii)
$$\begin{aligned} u + (-1) \cdot u &= 1 \cdot u + (-1) \cdot u && (N') \\ &= (1 + (-1)) \cdot u && (D2) \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u \\ &= 0_E && (i) \end{aligned}$$
Donc le symétrique de u est bien $(-1) \cdot u$.

Proposition D3.5

Soit $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$;

(ii) $(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$;

(iii) $-(\lambda \cdot u) = (-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u)$;

(iv) $\lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$;

(v) Si $u \neq 0_E$, alors $\lambda \cdot u = \mu \cdot u \Leftrightarrow \lambda = \mu$;

(vi) Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Leftrightarrow u = v$.

Dém. D3.5

(i) $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot (u + (-1) \cdot v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot (-1) \cdot v = \lambda \cdot u + (-1) \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$;

(ii) $(\lambda - \mu) \cdot u = (\lambda + (-\mu)) \cdot u = \lambda \cdot u + (-\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + (-1) \cdot (\mu \cdot u) = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$;

(iii) $-(\lambda \cdot u) = (-1) \cdot (\lambda \cdot u) = (-\lambda \cdot u)$ et $-(\lambda \cdot u) = (-1) \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda \cdot ((-1) \cdot u) = \lambda \cdot (-u)$;

(iv)
- La prop D3.4 donne le sens $\boxed{\Leftarrow}$
- Réciproquement, supposons $\lambda \cdot u = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$, alors $u = \dfrac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot u) = \dfrac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$.

(v) $\lambda \cdot u = \mu \cdot u \Leftrightarrow \lambda \cdot u - \mu \cdot u = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \cdot u = 0 \Leftrightarrow \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$ si $u \neq 0_E$.

(vi) $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Leftrightarrow \lambda \cdot u - \lambda \cdot v = 0_E \Leftrightarrow \lambda \cdot (u - v) = 0_E \Leftrightarrow u - v = 0_E \Leftrightarrow u = v$ si $\lambda \neq 0_E$.

1.2 Exemples fondamentaux

Produit d'espaces vectoriels

Définition et proposition D3.6

Soit $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors on peut définir sur $E_1 \times E_2$ la loi de composition interne

$$\begin{array}{rccl} + & : & (E_1 \times E_2)^2 & \to & E_1 \times E_2 \\ & & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{array}$$

et la loi de composition externe

$$\begin{array}{rccl} \cdot & : & \mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) & \to & E_1 \times E_2 \\ & & (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \end{array}$$

qui en font un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : l'**espace vectoriel produit** de E_1 et E_2.

Remarque. Ceci permet de définir le plan $\mathbb{R}^2$ ainsi que tous les espaces $\mathbb{K}^n$.

Espaces de polynômes

Proposition D3.7

La loi externe

$$\begin{array}{rcl} \cdot \; : \; \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ (\lambda, P) & \mapsto & \lambda \times P \end{array}$$

fait de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espaces de fonctions

Définition et proposition D3.8

Étant donnés un ensemble X et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on note $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions $X \to E$. On peut définir la **somme** de fonctions et la **multiplication par un scalaire** : étant donnés $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcl} f + g \; : \; X & \to & E \\ x & \to & f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \lambda \cdot f \; : \; X & \to & E \\ x & \to & \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

qui font de $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel (dont le vecteur nul est la matrice nulle). $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel (dont le vecteur nul est la suite nulle).

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition D3.9

(i) Soit $(u_i)_{i=1\dots n}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs u_i un vecteur de la forme
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i,$$
où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 1 \dots n$.

(ii) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs u_i un vecteur de la forme
$$\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot u_i,$$
où $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ est une famille presque nulle (autrement dit : à support fini) de scalaires.

Remarque. Un objectif est souvent de savoir exprimer n'importe quel vecteur comme combinaison linéaire de certains vecteurs de base, les λ_i jouant alors le rôle de coordonnées ; nous y reviendrons.

Définition D3.10

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E lorsque

(i) F est non-vide,

(ii) F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire
- ➢ $\forall u, v \in F$, $u + v \in F$,
- ➢ $\forall u \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u \in F$

Remarques.

- En pratique, pour montrer que F est non vide, on vérifiera le plus souvent que $0_E \in \mathbb{F}$.
- Les deux conditions de stabilité reviennent à dire que F est stable par combinaison linéaire, *i.e.*

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F.$$

Proposition D3.11

Soit F un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Alors les restrictions à F des lois $+$ et $\cdot$ font de $(F, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. Le plus souvent, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on s'attachera à montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Proposition D3.12 (Intersection de sous-espaces)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Soit I un ensemble quelconque et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition D3.13 (Sous-espace engendré)

Soit E un espace vectoriel et A une partie de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A et on note $\operatorname{Vect} A$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A :

$$\operatorname{Vect} A = \bigcap_{\substack{H \text{ sev de } E \\ A\subset H}} H.$$

Théorème et définition D3.14

(i) Soit E un espace vectoriel et A une partie de E. $\operatorname{Vect} A$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. Autrement dit, $F = \operatorname{Vect} A$ si et seulement si
- F est un sous-espace vectoriel de E,
- $A \subset F$,
- pour tout sous-espace G de E tel que $A \subset G$, on a $F \subset G$.

(ii) Soit I un ensemble tel que $A = \{u_i \mid i \in I\}$. Alors $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A, noté $\operatorname{Vect}(u_i)_{i\in I}$. Dans ce cas, on dit que $(u_i)_{i\in I}$ est une **famille génératrice** de E.

Définition D3.15 (Somme de sous-espaces)

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la **somme de** F_1 **et** F_2 est l'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{x \in E,\, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2,\, x = x_1 + x_2\}.$$

Proposition D3.16

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$F_1 + F_2 = \operatorname{Vect}(F_1 \cup F_2).$$

A fortiori, $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition D3.17 (Générateurs et sommes)

(i) Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E. Alors $\operatorname{Vect} A + \operatorname{Vect} B = \operatorname{Vect}(A \cup B)$.

(ii) Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ deux familles de vecteurs de E.
On note $(w_k)_{1\leqslant k\leqslant m+n} = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$. Alors

$$\operatorname{Vect}\left((u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right) + \operatorname{Vect}\left((v_j)_{1\leqslant j\leqslant m}\right) = \operatorname{Vect}\left((w_k)_{1\leqslant k\leqslant m+n}\right).$$

Définition D3.18

On dit que deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont **en somme directe** lorsqu'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes.

(i) La décomposition de tout élément de $F_1 + F_2$ comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 est unique.

(ii) $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Théorème et définition D3.19

On dit que deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont **supplémentaires dans** E lorsqu'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes.

(i) $\forall x \in E$, $\exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$.

(ii) $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

On note $E = F_1 \oplus F_2$.

2 Applications linéaires

Dans la suite, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2.1 Définitions

Définition D3.20

On dit qu'une application $f : E \to F$ est **linéaire** (ou **$\mathbb{K}$-linéaire**) de E dans F si

(i) $\forall x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Remarque. On parle aussi de **morphisme** ou d'**homomorphisme** d'espaces vectoriels.

Proposition D3.21

Soit $f :\to F$ une application linéaire. Alors
(i) $f(0_E) = 0_F$,
(ii) $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition D3.22

(i) Une application linéaire $E \to E$ est appelée **endomorphisme de** E.
(ii) Une application linéaire $E \to \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire sur** E.

Notations. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ (on trouve parfois $\mathrm{End}(E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

2.2 Opérations

Proposition D3.23 (Structure)

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarque. En particulier, l'application nulle et la combinaison d'applications linéaires sont des applications linéaires.

Proposition D3.24 (Composition)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Proposition D3.25

Soit $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors
(i) $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$,
(ii) $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$,
(iii) $g \circ (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (g \circ f) = (\lambda \cdot g) \circ f$.

Remarque. Dans le cas où $E = F = G$, ces propriétés font de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ un anneau.

2.3 Bijectivité

Proposition D3.26

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et bijective. Alors la réciproque de f est une application linéaire $f^{-1} : F \to E$.

Définition D3.27

(i) On dit que $f : E \to F$ est un **isomorphisme de** E **dans** F si elle est linéaire et bijective. On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

(ii) On dit que $f : E \to E$ est un **automorphisme de** E si elle est linéaire et bijective. On appelle **groupe linéaire** l'ensemble des automorphismes de E, noté $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition D3.28

(i) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes. Alors $g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme.

(ii) Soit f et g deux automorphismes de E. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux automorphismes de E.

Remarque. Cette propriété fait de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ un groupe.

2.4 Noyau, image

Définition D3.29 (Noyau)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau de** f, noté $\operatorname{Ker} f$, l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

Proposition D3.30

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème D3.31

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Définition D3.32 (Image)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de f, notée $\operatorname{Im} f$, l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Proposition D3.33

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème D3.34

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Proposition D3.35

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $E = \operatorname{Vect}(u_i)_{i \in I}$, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(x_i))_{i \in I}$.

2.5 Équations linéaires

Définition D3.36

On appelle **équation linéaire** une équation d'inconnue x de la forme

$$f(x) = b \tag{D3.1}$$

avec

- $f \in \mathcal{L}(E, F)$,
- $b \in F$ appelé **second membre** de l'équation.

Théorème D3.37 (Solutions d'une équation linéaire)

L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solutions de l'équation linéaire (D3.1) est

soit vide,

soit un sous-espace affine de E dont la direction est $\operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire : si x_0 est une solution de l'équation (D3.1), alors $\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$.

Remarque. Pour résoudre une équation linéaire comme celle présentée en (D3.1), on se ramène souvent à trouver une solution particulière de cette équation, ainsi que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre (appelée **équation homogène**) : $f(x) = 0_F$.

Proposition D3.38 (Principe de superposition)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $(b_i)_{i=1\dots n}$ une famille d'éléments de F et $(\lambda_i)_{i=1\dots n}$ des scalaires. On considère l'équation (D3.1) avec $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Si pour tout $i = 1\dots n$, x_i vérifie $f(x_i) = b_i$, alors

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

est une solution de l'équation (D3.1).

3 Projections, symétries

On suppose dans ce chapitre que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$.

Définition D3.39 (Projection)

Si pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, la **projection sur F parallèlement à G** est l'application

$$\begin{array}{rccc} p & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x_F. \end{array}$$

Proposition D3.40

La projection p sur F parallèlement à G est linéaire et

(i) $\operatorname{Ker} p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$.

(ii) $p_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $p_{|G} = 0$.

(iii) $p \circ p = p$.

Remarque. Si on appelle q la projection sur G parallèlement à F, alors on a

(i) $p + q = \mathrm{Id}_E$,

(ii) $F = \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$,

(iii) $G = \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$.

Définition D3.41 (Projecteur)

On appelle **projecteur de** E tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie

$$p \circ p = p.$$

Proposition D3.42

Si p est un projecteur de E, alors c'est une projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Définition D3.43 (Symétrie)

Si pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, la **symétrie d'axe** F **et de direction** G est l'application

$$\begin{array}{rccc} s & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x_F - x_G. \end{array}$$

Proposition D3.44 (Lien entre projection et symétrie)

Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie d'axe F et de direction G. Alors

(i) $s = 2p - Id_E$,

(ii) $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition D3.45

La symétrie s d'axe F et de direction G est linéaire et

(i) $F = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)$ et $G = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$.

(ii) $s_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{Id}_G$.

(iii) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Proposition D3.46

Si s vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, alors c'est une symétrie d'axe $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)$ et de direction $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$.

Remarque. Un endomorphisme s tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ s'appelle une **involution**.

Méthodes

- Montrer qu'un ensemble est un sev
  - ➢ en vérifiant les stabilités,
  - ➢ en exhibant une famille génératrice.
- Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.
- Montrer qu'une application est linéaire.
- Déterminer le noyau, l'image d'un morphisme.

Chapitre D4

Dimension finie

Objectifs

- Décrire des objets d'algèbre linéaire avec un nombre limité d'informations :
  - ➢ une base pour un sev,
  - ➢ l'image d'une base pour une application linéaire.
- Utiliser la dimension pour caractériser des notions d'algèbre linéaire :
  - ➢ une base,
  - ➢ un isomorphisme,
  - ➢ des sev supplémentaires.

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les x_i sont des vecteurs de E et les λ_i sont des scalaires de $\mathbb{K}$.

1 Familles libres, bases

Définition D4.1

On dit que la famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est **liée** (ou que les vecteurs sont **linéairement dépendants**) s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Une famille qui n'est pas liée est composée de vecteurs **linéairement indépendants**. On dit qu'elle est **libre**.

Remarque. Dire qu'une famille est liée revient à dire que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Proposition D4.2

Une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre si et seulement si pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Définition D4.3

On dit qu'une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème et définition D4.4

Une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des x_i :

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ forme la famille des **composantes** (ou **coordonnées**) de x dans la base $(x_1, \ldots, x_n)$.

Définition D4.5

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Sinon on dit qu'il est de **dimension infinie**.

Lemme D4.6

(i) Étant donnée $\mathcal{L} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de E et $x \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$, la famille $(x_1, \ldots, x_n, x)$ est aussi une famille libre de E.

(ii) Étant donnée $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n).$$

Théorème D4.7 (de la base incomplète)

Soit $p, q, n \in \mathbb{N}^*$. Étant données dans E

- ➢ une famille libre $\mathcal{L} = (\ell_1, \dots, \ell_p)$,
- ➢ une famille génératrice $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$,

il existe une base $\mathcal{B}$ de E de la forme

$$\mathcal{B} = (\ell_1, \dots, \ell_p, \ell_{p+1}, \dots, \ell_n)$$

avec $\ell_{p+1}, \dots, \ell_n \in \mathcal{G}$.

Remarque. Ce théorème a trois conséquences très utiles.

- Théorème d'existence de base : tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie admet une base.
- Théorème de la base incomplète : étant donnée une famille libre dans un ev E de dimension finie, on peut la compléter en une base de E.
- Théorème de la base extraite : étant donnée une famille génératrice d'un ev E de dimension finie, on peut en extraire une base de E.

Théorème D4.8

Le cardinal d'une famille libre de E est toujours plus petit que le cardinal d'une famille génératrice.

Théorème et définition D4.9

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont même cardinal, appelé **dimension** de E et noté $\dim E$.

Remarque. Par convention la dimension de l'espace $\{0\}$ est 0.

Théorème D4.10

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.

(i) Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $p \leqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

(ii) Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $p \geqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème D4.11

Soit F un sev de E. Alors

(i) $\dim F \leqslant \dim E$,

(ii) $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

Théorème D4.12

Soit E un ev de dimension n. Soit F et G deux sev de E munis des bases respectives $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$. Alors on a équivalence entre

(i) $E = F \oplus G$,

(ii) $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E.

Remarque. Ce théorème a deux conséquences intéressantes.

- En termes de dimensions, si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.
- En dimension finie, tout sev admet un supplémentaire.

Théorème D4.13 (Formule de Grassmann)

Soit F et G deux sev de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Remarque. Par conséquent, parmi les trois conditions suivantes, il suffit d'en établir deux pour montrer que $E = F \oplus G$:

(1) $F \cap G = \{0_E\}$,

(2) $F + G = E$,

(3) $\dim F + \dim G = \dim E$.

3 Applications linéaires

3.1 Détermination d'une application linéaire

Théorème D4.14

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Étant donnée une famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F, il existe une unique application $u : E \to F$ telle que pour tout i, $u(e_i) = f_i$. De plus,

- u est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre,
- u est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.

Corollaire D4.15

Avec les notations précédentes, F est isomorphe à E si et seulement si $\dim F = \dim E = n$.

Remarque. Ceci permet d'établir un isomorphisme entre tout $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathbb{K}^n$.

Corollaire D4.16

Étant donnés E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie, on a

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Proposition D4.17

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux ev de même dimension finie. Alors on a équivalence entre

(i) u est injective,

(ii) u est surjective,

(iii) u est un isomorphisme.

Proposition D4.18

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors on a équivalence entre

(i) u est inversible à gauche,

(ii) u est inversible à droite,

(iii) u est inversible.

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition D4.19 (Rang)

(i) Soit E un ev de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de u la dimension de $\mathrm{Im}\, u$.

Notations. On note ces quantités $\mathrm{rg}\,\mathcal{F}$ et $\mathrm{rg}\, u$.

Proposition D4.20

Étant donnée $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on a

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u(e_1), \ldots, u(e_n)).$$

Proposition D4.21

Soit E, F, G trois ev de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

(i) $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

(ii) Si v est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.

(iii) Si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.

Théorème D4.22 (du rang)

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u.$$

3.3 Hyperplans

Définition D4.23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) On appelle forme linéaire toute application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$.

(ii) On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et on appelle **espace vectoriel dual de** E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Définition D4.24

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle **hyperplan** de E tout sev de E qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Théorème D4.25 (Caractérisation des hyperplans)

Soit H un sev de E. Alors on a équivalence entre

(i) H est un hyperplan de E,

(ii) il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$.

Théorème D4.26 (Caractérisation des hyperplans en dimension finie)

Soit H un sev de E, un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors on a équivalence entre

(i) H est un hyperplan de E,

(ii) $\dim(H) = n - 1$.

Théorème D4.27

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E et H un hyperplan de E. Alors

(i) H admet une équation cartésienne dans la base $\mathcal{E}$, *i.e.* il existe $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que pour tout $x \in E$ de composantes $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans la base $\mathcal{E}$,

$$x \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

(ii) Deux équations cartésiennes de H dans une même base sont proportionnelles. Autrement dit : soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$ deux équations cartésiennes de H dans la base $\mathcal{E}$ (avec les notations évidentes). Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $b_i = \lambda a_i$.

Théorème D4.28

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

(i) Soit $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille d'hyperplans de E. Alors $\dim\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant n - p$.

(ii) Soit F un sev de E de dimension $n - p$ avec $p \in [\![0, n]\!]$. Alors il existe $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille d'hyperplans de E telle que $F = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i$.

Méthodes

- Vérifier qu'une famille de vecteurs est une base.
- Montrer qu'une application linéaire est bijective en utilisant l'égalité des dimensions.
- Déterminer un supplémentaire d'un sev.
- Montrer que deux sev sont supplémentaires
  - ➢ par caractérisation par les bases,
  - ➢ par caractérisation par la dimension.
- Déterminer le noyau ou l'image d'une application linéaire, connaissant l'autre, à l'aide du théorème du rang.
- Déterminer une application linéaire
  - ➢ par l'image des vecteurs d'une base,
  - ➢ par sa restriction sur des sev supplémentaires.

Chapitre D5

Matrices et applications linéaires

Objectifs

- Représentation matricielle d'une famille de vecteurs.
- Savoir construire ou lire la matrice d'une application linéaire.
- Changements de base et les matrices de passage.
- Comprendre comment deux matrices semblables représentent le même endomorphisme.

Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls et les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. On peut se limiter à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition et théorème D5.1

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ et $x \in F$. On note $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ sa décomposition dans la base $\mathcal{F}$. On appelle **matrice du vecteur** x dans la base $\mathcal{F}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ceci crée un isomorphisme entre F et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition D5.2

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de F. On appelle **matrice de la famille** $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{F}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}) = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccccc} v_1 & & v_j & & v_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to \cdot f_1 \\ \\ \to \cdot f_i \\ \\ \to \cdot f_n \end{array} \end{array}$$

où les a_{ij} sont les composantes des v_j dans la base $\mathcal{F}$.

Proposition D5.3

Avec les notations précédentes, $\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{V})\right) = \mathrm{rg}\left(\mathcal{V}\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}(\mathcal{V})\right)$.

2 Matrice d'une application linéaire

Définition D5.4

Soit

- ➢ E un espace vectoriel de base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$,
- ➢ F un espace vectoriel de base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$,
- ➢ $u \in \mathcal{L}(E, F)$

On appelle **matrice du u relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$** la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{array}{cl}
\begin{array}{ccccc} u(e_1) & & u(e_j) & & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to \cdot f_1 \\ \\ \to \cdot f_i \\ \\ \to \cdot f_n \end{array}
\end{array}$$

où

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

Remarque. Autrement dit,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Notation. Pour un endomorphisme, on note simplement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(u)$$

Théorème D5.5

Soit $\mathcal{E}$ une base de E un espace de dimension p et $\mathcal{F}$ une base de F un espace de dimension n. Alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque. En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})) = p \times n$.

Définition D5.6

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p(\mathbb{K})}$.

(i) On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'application

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}.$$

(ii) On appelle **noyau de** A le noyau de l'application $\tilde{A}$.

(iii) On appelle **image de** A l'image de l'application $\tilde{A}$.

Remarque. En identifiant vecteurs et matrices colonnes, cela donne aussi une application $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ que l'on dira aussi canoniquement associée à A.

Proposition D5.7

Soit E et F deux espaces vectoriels avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x).$$

Proposition D5.8

Soit E et F deux espaces vectoriels avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(u(x))) = \mathrm{rg}(u)$.

Proposition D5.9

Soit E, F et G trois espaces vectoriels avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u).$$

Remarque. Avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_E(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_F(u(x))$, on retient la forme

$$Y = AX.$$

Remarque. Tous les résultats précédents peuvent s'interpréter dans le cas particulier où $E = F$ et établissent une correspondance bijective entre matrices carrées et endomorphismes.

Proposition D5.10

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension avec pour bases respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

(i) u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est inversible.

(ii) Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u))^{-1}$.

3 Matrice de changement de base

Définition D5.11

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** (ou **matrice de changement de base**) de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E}$ et on note

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}).$$

Proposition D5.12

Soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ trois bases de l'espace vectoriel E. Alors on a

(i) $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$;

(ii) $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E)$;

(iii) $P_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$;

(iv) $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)^{-1} = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$.

Proposition D5.13 (Changement de base pour un vecteur)

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de E. Étant donné $x \in E$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(x) = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x).$$

Proposition D5.14 (Changement de base pour un morphisme)

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases de F. Étant donné $u : E \to F$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

Proposition D5.15 (Changement de base pour un endomorphisme)

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. Étant donné $u : E \to E$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

Remarque. Avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$, on retient la forme

$$A' = P^{-1}AP \text{ ou } A = PA'P^{-1}.$$

4 Matrices semblables

Définition D5.16

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Ceci définit la relation binaire dite de **similitude** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition D5.17

La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition D5.18

Soit E un ev de dimension n et de base $\mathcal{E}$.

(i) Soit $\mathcal{E}'$ une base de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ sont semblables.

(ii) Réciproquement, si A et B sont deux matrices semblables de taille n, alors il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}'$ une base de E telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$.

Définition D5.19

(i) On dit qu'une matrice carrée est **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

(ii) On dit qu'une matrice carrée est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.

5 Rang d'une matrice

Proposition D5.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) A est inversible,

(ii) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$,

(iii) $\operatorname{Im} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

(iv) $\operatorname{rg}(A) = n$.

Proposition D5.21

Soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

(i) $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$,

(ii) si $n = p$ et A est inversible, alors $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} B$,

(iii) si $p = q$ et B est inversible, alors $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} A$,

Définition D5.22

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est **équivalente à** B lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

Proposition D5.23

L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition et définition D5.24

La matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang $r \in \mathbb{N}$ si et seulement si elle est équivalente à la matrice J_r définie par blocs par

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$

Proposition D5.25

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\intercal)$.

Définition D5.26

Soit $n, p, m, q \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$. On dit que B est une **matrice extraite** de A lorsqu'il existe deux applications strictement croissantes $\varphi : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$ et $\psi : [\![1, q]\!] \to [\![1, p]\!]$ telles que

$$\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, q]\!],\ b_{i,j} = a_{\varphi(i),\psi(j)}.$$

Théorème D5.27 (Caractérisation du rang par les matrices extraites)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. Le rang de A est le plus grand entier k tel qu'il existe une matrice extraite de A carrée de taille k inversible.

Remarque. En particulier, toutes les matrices extraites de A sont de rang inférieur ou égal à $\mathrm{rg}(A)$.

Méthodes

- Écrire la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée.
- Écrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée.
- Étudier l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Écrire dans une nouvelle base la matrice d'une application linéaire. donnée.

Chapitre D6

Déterminant

Objectifs

- Notion de déterminant.
- Caractérisation théorique du déterminant.
- Lien avec l'inversibilité.
- Calcul pratique de déterminant.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention contraire, n est un entier naturel non nul et E un ev de dimension n.

1 Applications multilinéaires

Définition D6.1

Soit $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-ev. On dit qu'une application $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est **n-linéaire** lorsque pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \ldots \times E_n$,

$$t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n) \text{ est linéaire de } E_k \text{ dans } F.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**. On dit **bilinéaire**, **trilinéaire** pour 2-linéaire, 3-linéaire respectivement.

Définition D6.2

On dit qu'une forme n-linéaire sur E^n est **alternée** lorsque $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ dont (au moins) deux vecteurs sont égaux.

Proposition et définition D6.3

Soit $n \geqslant 2$ et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. On pose $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

(i) On ne change pas la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteur x_i une combinaison linéaire des autres (invariance par transvection).

(ii) Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

(iii) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$. Alors

$$f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = -f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots).$$

(iv) Soit $\sigma \in S_n$. Alors

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n).$$

Lorsqu'une des deux dernières propriétés est vérifiée, on dit que f est **antisymétrique**.

Proposition D6.4

Toute forme n-linéaire antisymétrique est alternée.

2 Déterminant

2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Théorème et définition D6.5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E Il existe une unique application $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire et alternée qui prend la valeur 1 en $(e_1, \ldots, e_n)$. On l'appelle **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$, notée $\det_{\mathcal{B}}$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, si on note (a_{ij}) la matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Proposition D6.6

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

(i) Formule de changement de base : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$.

(ii) Caractérisation des bases : $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{boB}(\mathcal{F}) \neq 0$

2.2 Déterminant d'une matrice

Définition D6.7

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle**déterminant de la matrice** A le nombre

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \ldots, C_n),$$

où les C_i sont les colonnes de la matrices A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Notation. On note

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proposition D6.8

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Proposition D6.9

(i) $\det(I_n) = 1$.

(ii) Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(iii) Le déterminant d'une matrice ayant deux lignes égales ou deux colonnes égales est nul.

(iv) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(v) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(vi) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(A^\intercal)$.

Corollaire D6.10

det induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$.

Corollaire D6.11

Les déterminants de deux matrices semblables sont égaux.

2.3 Calcul pratique

Proposition D6.12

(i) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

(ii) Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

Proposition D6.13

Le déterminant d'une matrice est inchangé lorsqu'on ajoute à une ligne (resp. une colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. colonne).

Remarque. En particulier, on peut effectuer certaines opérations d'une méthode de pivot de Gauß sans changer la valeur du déterminant. Plus précisément, il suffit de s'interdire toute transvection de diagonale non constante égale à 1. Dès lors on peut espérer se ramener à un calcul de déterminant plus simple.

Définition D6.14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

(i) On appelle **mineur** de A de position (i, j) le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j. OOn notera $\Delta_{ij}(A)$ ce déterminant.

(ii) On appelle **cofacteur** de A de position (i, j) le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$.

(iii) On appelle **comatrice** de A la matrice $\operatorname{com}(A) = \big((-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Théorème D6.15 (Développement par rapport à une ligne ou colonne)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}(A)$.

(ii) Soit $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}(A)$.

Théorème D6.16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \times (\operatorname{com} A)^\intercal = (\operatorname{com} A)^\intercal \times A = \det(A) I_n$.
En particulier, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} (\operatorname{com} A)^\intercal$.

2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème et définition D6.17

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ considérée. Ce nombre s'appelle **déterminant de** u, noté $\det(u)$.

3 Interprétations du déterminant

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E.

Définition D6.18 (Déterminant d'une famille de vecteurs)

Soit X une famille de n vecteurs de E. On appelle **déterminant de X dans la base $\mathcal{B}$** le déterminant de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$, noté $\det_{\mathcal{B}}(X)$.

Théorème D6.19

Avec les notations ci-dessus, la famille X est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(X) \neq 0$.

Proposition D6.20 (Interprétations géométriques)

- Dans le cas $n = 2$, le déterminant d'une famille de deux vecteurs (x_1, x_2) dans la base (b_1, b_2) représente l'aire du parallélogramme de côtés x_1 et x_2, l'unité d'aire étant celle du parallélogramme de côtés b_1 et b_2, affectée d'un signe représentant l'orientation de (x_1, x_2) par rapport à celle de (b_1, b_2).
- Avec des conventions similaires dans le cas $n = 3$, le déterminant de (x_1, x_2, x_3) dans la base (b_1, b_2, b_3) représente le volume algébrique du parallélépipède de côtés x_1, x_2 et x_3.

Théorème et définition D6.21

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme de E. On appelle **déterminant de** u et on note $\det u$ le déterminant de toute matrice représentant u dans une base de E. Notamment, cette quantité ne dépend pas de la base choisie.

Proposition D6.22

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.
- $\det(v \circ u) = (\det v)(\det u)$.
- $u \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $\det u \neq 0$. Dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Proposition D6.23

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $X = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det u \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Méthodes

- Calculer un déterminant
  - ➢ triangulaire par blocs,
  - ➢ par opérations élémentaires,
  - ➢ par développement selon une ligne ou colonne,
  - ➢ en établissant une formule de récurrence.
- Étudier l'inversibilité d'une matrice.

Chapitre D7

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire, norme

Définition D7.1

On appelle **produit scalaire** sur E une application $\langle \cdot\,,\cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire

- $\forall x_1, x_2, y \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \mu \langle x_2, y \rangle$,
  $\forall x, y_1, y_2 \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \mu \langle x, y_2 \rangle$,
- $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geqslant 0$,
- $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Notations. On peut rencontrer les notations $(x|y)$, $\langle x|y \rangle$ ou encore $x \cdot y$.

Définition D7.2

(i) Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien réel**.
(ii) Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

Définition D7.3

Soit E un espace préhilbertien réel.

(i) Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. L'application $N : x \mapsto \|x\|$ est appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$.
Un vecteur de norme 1 est appelé **vecteur unitaire**.

(ii) La **distance euclidienne** associée à la norme euclidienne est l'application

$$\mathrm{d} : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}$$

Théorème D7.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall x, y \in E,\ |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition D7.5

La norme euclidienne vérifie

(i) (homogénéité) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

(ii) (positivité et séparation) $\forall x \in E,\ \|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,

(iii) (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in \mathrm{E},\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Proposition D7.6 (Identité de polarisation)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Proposition D7.7 (Identité du parallélogramme)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs et familles orthogonaux

Définition D7.8

Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

(i) Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$.

(ii) Une famille de vecteurs de E est une **famille orthogonale** si deux vecteurs quelconques de cette famille sont toujours orthogonaux.

(iii) Si de plus tous ses vecteurs sont unitaires, la famille est dite **orthonormée**.

Remarque. En utilisant le symbole de Kronecker, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormée, on a

$$\forall i, j \in I,\ \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Proposition D7.9

Dans un espace euclidien, toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre.

Remarque. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Définition D7.10

Dans un espace euclidien E, une famille orthonormée qui est une base de E est appelée **base orthonormée (b.o.n.)** de E.

Théorème D7.11 (Pythagore)

Soient E un espace préhilbertien réel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale. Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

2.2 Bases orthonormées

Proposition D7.12

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Les composantes dans cette base de tout vecteur $x \in E$ sont données par

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Proposition D7.13

Avec les notations ci-dessus, le produit scalaire des vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

et la norme de x est donnée par

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

Théorème D7.14 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soient E un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre quelconque de E. Alors il existe une famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que

- $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est orthonormée,
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\operatorname{Vect}(\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}) = \operatorname{Vect}(\{e_1, \ldots, e_k\})$.

Si l'on ajoute la condition $\langle \varepsilon_i, e_i \rangle > 0$ pour tout i, alors cette famille est unique.

Remarque. La démonstration constructive de cette propriété donne un algorithme pour construire la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$:

- Tout d'abord
$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$
- Supposons construits $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$). Alors on pose
$$\varepsilon'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \quad \text{puis} \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon'_{k+1}}{\|\varepsilon'_{k+1}\|}.$$

Théorème D7.15

(i) Tout espace euclidien possède des bases orthogonales et des bases orthonormées.

(ii) Toute famille orthonormée (resp. orthogonale) d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée (resp.orthogonale).

3 Projecteurs orthogonaux

3.1 Sous-espaces orthogonaux

Définition D7.16

Soit E un espace préhilbertien réel.

(i) On dit que deux parties X et Y de E sont orthogonales lorsque
$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \langle x, y \rangle = 0.$$

(ii) Soit X une partie de E. On appelle **orthogonal de** X l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de X, noté
$$X^{\perp} = \{x \in E \,|\, \forall y \in X, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Proposition D7.17

Soit X, Y deux parties d'un espace préhilbertien E.

(i) $X \subset Y^\perp \Leftrightarrow Y \subset X^\perp$,

(ii) $X^\perp$ est un sev de E,

(iii) $X \subset Y \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$,

(iv) $X^\perp = (\operatorname{Vect} X)^\perp$,

(v) $X \cap X^\perp = \{0_E\}$,

(vi) $X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$,

Théorème et définition D7.18

Soient E un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie de E. Alors l'orthogonal de F en est un supplémentaire, appelé **supplémentaire orthogonal** de F. On a

$$E = F \oplus F^\perp.$$

On a la propriété du **biorthogonal** : $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

3.2 Projection orthogonale

Définition D7.19

Soent E un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie de E. La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée **projection orthogonale sur** F, notée p_F.

Remarque. La décomposition de x sur $F \oplus F^\perp$ s'écrit alors

$$x = p_F(x) + \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp}$$

Proposition D7.20

Avec les notations ci-dessus et en notant $(e_1, \ldots, e_p)$ une b.o.n. de F, on a

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k.$$

Proposition D7.21 (Inégalité de Bessel)

Avec les notations ci-dessus, on a

$$\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$

3.3 Distance à un sous-espace de dimension finie

Dans ce paragraphe, E désigne un espace préhilbertien réel et F un sev de E de dimension finie.

Définition D7.22

Soit $x \in E$. On appelle **distance de** x **à** F la borne inférieure des distances de x à un élément quelconque de F.

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Théorème D7.23

Étant donné $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément qui réalise la distance de x à F.

$$\|x - p_F(x)\| = \mathrm{d}(x, F).$$

Remarque. Évidemment si $x \in F$, cette distance est nulle et le projeté en question est x lui-même.

Cinquième partie

De alea et probabilitate

Chapitre E1

Dénombrement

1 Ensembles et parties finis

Lemme E1.1

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. S'il existe une bijection entre $[\![1,m]\!]$ et $[\![1,n]\!]$, alors $m=n$.

Définition E1.2

On dit que l'ensemble E est un **ensemble fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection entre E et $[\![1,n]\!]$.
D'après le lemme ci-dessus, si un tel entier existe, il est unique ; on l'appelle **cardinal** de E, noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ (anciennement $\#E$). Par extension, l'ensemble vide a un cardinal nul.
Deux ensembles de même cardinal sont dits **équipotents**.

Proposition E1.3

Soit E un ensemble fini et F une partie de E. Alors

(i) $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$;

(ii) $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow E = F$.

Théorème E1.4 (Parties finies de $\mathbb{N}$)

(i) Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.

(ii) Si P est une partie non vide de $\mathbb{N}$, de cardinal n, alors il existe une unique bijection strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ dans P.

Proposition E1.5

Soit $f : E \to F$ avec E et F ensembles finis. Alors

(i) $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card} E$;

(ii) $\operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card} E \Leftrightarrow f$ est injective.

Théorème E1.6

Soit $f : E \to F$ avec E et F deux ensembles finis de même cardinal. Alors on a équivalence entre
(i) f est injective,
(ii) f est surjective,
(iii) f est bijective.

Opérations

Proposition E1.7

Soient E et F deux ensembles finis.
(i) $E \cup F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F - \mathrm{Card}(E \cap F)$.
(ii) $E \times F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}\, E \times \mathrm{Card}\, F$.

Remarque. Si E et F sont finis et disjoints, alors $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F$. Dans ce cas on note $E \cup F = E \sqcup F$.

Proposition E1.8 (Nombre d'applications)

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Alors

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}(E, F)) = n^p.$$

Proposition E1.9 (Nombres de parties de E)

Soient E un ensemble fini de cardinal p. Alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^p.$$

2 Dénombrement

2.1 Principes

Théorème E1.10 (Lemme des bergers)

Soit $f : E \to F$ une application et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ est fini de cardinal m. Alors

(i) E est fini si et seulement si F est fini.

(ii) $\operatorname{Card} E = m \operatorname{Card} F$.

2.2 p-listes

Définition E1.11

Étant donnés un ensemble E et $p \in \mathbb{N}$, on appelle p-**liste** d'éléments de E tout p-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire tout élément de E^p.

Remarque. L'ordre des éléments compte et il peut y avoir des répétitions.

Proposition E1.12

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

2.3 p-arrangements

Définition E1.13

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, on appelle p-**arrangement** de E toute p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque. L'ordre des éléments compte et il ne peut pas y avoir de répétitions.

Proposition E1.14

Avec les mêmes notations,

(i) le nombre de p-arrangements de E est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$;

(ii) Le nombre d'injections de E dans $[\![1, p]\!]$ est $\dfrac{p!}{(p-n)!}$.

Définition E1.15

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans lui-même.

Proposition E1.16

Avec les mêmes notations, il existe $n!$ permutations de E

Remarque. Il y a une correspondance entre les permutations et les n-arrangements de E.

2.4 p-combinaisons

Définition E1.17

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **p-combinaison** de E toute partie de cardinal p de E.

Remarque. L'ordre des éléments ne compte pas et il ne peut pas y avoir de répétitions.

Proposition E1.18

Avec les mêmes notations,

(i) le nombre de p-combinaisons de E est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$,

(ii) si $p \leqslant n$, alors le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est $\binom{n}{p}$.

Proposition E1.19

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(i) $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;

(iii) $\forall p \in [\![0,n-1]\!]$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (formule de Pascal) ;

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (formule du binôme de Newton).

Chapitre E2

Probabilités sur un univers fini

Objectifs

- Appréhender le formalisme des espaces probabilisés.
- Lire un arbre de probabilités conditionnelles dans tous les sens.
- Notion d'indépendance.

1 Expérience aléatoire

Définition E2.1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude. Les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés **issues** et leur ensemble est l'**univers** des possibles, souvent noté Ω.
Un **événement** est un sous-ensemble de Ω dont on dit qu'il se produit ou non suivant l'issue de l'expérience.

Notation. Soit $A \subset \Omega$ un événement aléatoire. On dit que cet événement est réalisé lorsque l'issue ω de notre expérience est un élément de A.

On a alors la correspondance suivante entre le vocabulaire des événements et celui des parties de Ω.

événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement élémentaire	singleton $\{\omega\}$
disjonction (A ou B)	$A \cup B$
conjonction (A et B)	$A \cap B$
événement contraire de A	$\overline{A}$
événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
système complet d'événements	partition

Remarque. Un système complet d'événements (s.c.e.) permet de décomposer un événement en plusieurs sous-événements : soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un s.c.e. et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $B = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$.

2 Loi de probabilité

Définition E2.2

Soit Ω un univers fini. $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ est une **loi de probabilité** lorsque

- $P(\Omega) = 1$,
- $\forall A, B$ incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans ce cas, on dit que (Ω, P) est un **espace probabilisé fini**.

Définition E2.3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Un événement A est dit **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$ et **négligeable** ou **presque impossible** lorsque $P(A) = 0$.

Proposition E2.4

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A, B des événements. Alors

(i) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

(ii) (inégalité de Boole) $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$,

(iii) (formule du crible) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

(iv) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$,

(v) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

Remarques.

- Avec Ω fini, donner $P(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$ suffit à définir la loi de probabilités P.
- L'inégalité de Boole se généralise à un nombre n quelconque d'événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- La formule du crible se généralise également. On l'énonce ici pour trois événements A, B et C.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Théorème E2.5

Avec les mêmes notations et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3 Probabilités conditionnelles

Théorème et définition E2.6

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et A, B des événements. Si $P(B) \neq 0$, on définit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Alors P_B est une loi de probabilité et $P_B(A)$, aussi notée $P(A|B)$, s'appelle la **probabilité conditionnelle de A sachant B**.

Remarque. Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des événements incompatibles. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} P_B(A_i) = P_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

En particulier, $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$.

Théorème E2.7 (Formule des probabilités composées)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des événements (avec $n \geqslant 2$) tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque. En particulier, $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$, ce qui n'est pas une grosse surprise au vu de la définition.

Dém. E2.7

Par récurrence, l'hérédité étant assurée par $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$ appliquée avec $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et $B = A_{n+1}$.

Théorème E2.8 (Formule des probabilités totales)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements (non négligeables). Alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B).$$

Dém. E2.8

Les $B \cap A_i$ forment une partition de B, comme on l'a souligné en début de chapitre.
Donc $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$ par définition de P_{A_i}.

Corollaire E2.9

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $P(A) > 0$. Alors

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Théorème E2.10 (Formule de Bayes)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $P(A)$ et $P(B)$ non nuls. Alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

Remarque. On trouve une version générale de cette formule pour laquelle il suffit d'exprimer $P(B)$ à l'aide de la formule des probabilités totales avec $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements : pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(A|B) = \frac{P_A(B)P(A)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

4 Indépendance

Définition E2.11

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Proposition E2.12

Avec les notations ci-dessus, si A et B sont indépendants, alors

- A et $\overline{B}$ sont indépendants,
- $\overline{A}$ et B sont indépendants,
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants,
- $P_B(A) = P(A)$.

Définition E2.13

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini. On dit que des événements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont

(i) **indépendants deux à deux** lorsque

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

(ii) **mutuellement indépendants** lorsque

$$\forall J \subset [\![1, n]\!],\ P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

Proposition E2.14

Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse.

Méthodes

- Calculer des probabilités
  - ➢ par dénombrement direct d'issues équiprobables,
  - ➢ en parcourant un arbre par probabilités composées,
  - ➢ en décomposant à l'aide des probabilités totales,
  - ➢ par la formule de Bayes.

Chapitre E3

Variables aléatoires

Objectifs

- Notion de variable aléatoire.
- Reconnaître les expériences menant à des variables usuelles, calculer et reconnaître leurs lois.
- Exprimer et manipuler des grandeurs telles que l'espérance, la variance, l'écart-type.
- Lois marginales et loi conjointe d'un couple de VAD.
- Indépendance, covariance.
- Inégalités de Markov et Tchbychev.

Dans tout ce qui suit, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini, E et F désignent deux ensembles et n un entier naturel non nul.

1 Variables aléatoires réelles

1.1 Généralités

Définition E3.1

(i) Soit E un ensemble. On appelle **variable aléatoire** (VA) sur Ω toute application $X : \Omega \to E$.

(ii) On appelle **variable aléatoire réelle** (VAR) sur Ω toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Son **ensemble de valeurs** est l'ensemble fini $X(\Omega) = \{X(\omega),\, \omega \in \Omega\}$.

Notations.

- Dans Ω, on note $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'événement $X^{-1}(\{\omega\}) = \{\omega \in \Omega,\, X(\omega) = x\}$.
- Si A est un sous-ensemble de $X(\Omega)$, on note $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega,\, X(\omega) \in A\}$.

Théorème et définition E3.2

Soit X une VA sur Ω. Alors

$$\begin{array}{rrcl} P_X : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}.$$

est appelée **loi de la variable** X et permet de définir une loi de probabilités sur $X(\Omega)$.

Proposition E3.3

Les événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements.

Remarque. Comme pour une loi de probabilité sur un univers fini, P_X est entièrement déterminée par les $(P_X(\{x\}))_{x \in X(\Omega)}$. C'est ce qu'il suffit de donner quand on demande la loi d'une variable aléatoire.

Définition et théorème E3.4

On dit que deux VA X et Y **ont même loi** ou **sont égales en loi** lorsque l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

(i) $P_X = P_Y$.

(ii) $\forall x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = P(Y = x)$.

On note alors $X \sim Y$.

1.2 Espérance, variance

Définition E3.5

L'**espérance** d'une variable aléatoire réelle X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in E} xP(X = x).$$

Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite **centrée**.

Proposition E3.6

L'espérance d'une VAR X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.

Proposition E3.7

Soient X et Y deux VAR et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

- linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$,
- positivité : si X est à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
- croissance : si $P(X \leqslant Y) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
- inégalité triangulaire : $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Définition E3.8

La **variance** d'une variable aléatoire X à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ est

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

et son **écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$. Une variable centrée de variance égale à 1 est dite **centrée réduite**.

Proposition E3.9

Avec les notations ci-dessus, on a

(i) $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$,

(ii) $\mathbb{V}(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = \mathbb{E}(X)) = 1$

Proposition E3.10 (Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Proposition E3.11

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Proposition et définition E3.12

Si X est une VAR, $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite. On appelle cette v.a. la **centrée réduite** de X, notée X^*

1.3 Lois usuelles

Définition E3.13

On dit que la variable X suit une **loi certaine** de paramètre $a \in \mathbb{R}$ lorsque $X(\Omega) = \{a\}$ et

$$P(X = a) = 1.$$

Proposition E3.14

Si X suit une loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = 0$.

Définition E3.15

On dit que la variable X à valeurs dans l'ensemble fini E suit une **loi uniforme** lorsque

$$\forall x \in E,\ P(X = x) = \frac{1}{|E|}.$$

On note alors $X \sim \mathscr{U}(E)$.

Proposition E3.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1+n}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Définition E3.17

On dit que la variable X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ lorsque

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p \quad .$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Proposition E3.18

Soit $p \in [0, 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

Définition E3.19

On dit que la variable X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ lorsque

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Proposition E3.20

Soit $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

1.4 Inégalités

Théorème E3.21 (Inégalité de Markov)

Soit X une VAR positive. Soit $a > 0$. Alors

$$P(X > a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Dém. E3.21

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x<a}} xP(X=x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} xP(X=x).$$

$$\mathbb{E}(X) \geqslant a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} P(X=x) = aP(X \geqslant a).$$

Théorème E3.22 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une VAR. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dém. E3.22

On applique l'inégalité de Markov à la VAR $(X - \mathbb{E}(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$.

1.5 Transfert

Théorème et définition E3.23

Soit $X : \Omega \to E$ une VAR et $f : E \to F$ une application. On appelle **image de X par** f la variable aléatoire $f \circ X : \Omega \to F$, notée $f(X)$.
La loi de $f(X)$ est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ P\left(f(X) \in A\right) = P\left(X \in f^{-1}(A)\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) \in A}} P(X = x).$$

Proposition E3.24

Soit X, Y deux VAR à valeurs dans E et $f : E \to F$ une fonction réelle. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Théorème E3.25 (transfert)

Soit X une VAR et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

2 Couple de variables aléatoires

2.1 Indépendance

Définition E3.26

Deux VA X et Y sont dites **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ lorsque

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y).$$

Définition E3.27

Soit $U \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement non négligeable et X une VA. On appelle **loi conditionnelle de X sachant U** la loi de X relativement à l'espace probabilisé (Ω, P_U), autrement dit

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P_U(X \in A) = P((X \in A)|U) \end{array}$$

Remarque. En particulier si X, Y sont deux VA et $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, on définit la probabilité conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ par

$$\forall x \in X(\Omega),\ P((X = x)|(Y = y)) = P_X(\{x\}|\{Y = y\}) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(Y = y)}.$$

Proposition E3.28

Deux VA X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P_X(\{x\}|\{Y = y\}) = P_X(\{x\})$.

2.2 Lois d'un couple de VA

Théorème et définition E3.29

Soit X et Y deux VA sur Ω à valeurs dans E et F respectivement.

(i) L'application $(X, Y) : \begin{array}{rcl} \Omega & \rightarrow & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$ est une VA, appelée **couple de variables aléatoires**.

(ii) La **loi du couple** (X, Y) ou **loi conjointe** de X et Y est

$$P_{(X,Y)} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}((X,Y)(\Omega)) & \rightarrow & [0,1] \\ U & \mapsto & P((X,Y) \in U) \end{array}.$$

(iii) Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales** du couple (X, Y).

Notation. On note $P((X,Y) = (x,y)) = P((X = x) \cap (Y = y))$, parfois aussi $P(X = x, Y = y)$ (on peut lire « probabilité que $X = x$ et $Y = y$ »).

Proposition E3.30

Soit (X, Y) un couple de VA.

- $\forall x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap [Y = y])$.
- $\forall y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P((Y = y) \cap (X = x))$.

Proposition E3.31

Soit (X, Y) un couple de VA et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to E$. Alors $g(X, Y)$ est une VAR.

Exemples. Les cas les plus couramment étudiés sont $X + Y$, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, ou encore XY.

Théorème E3.32 (Transfert)

Si la VA $Z = g(X, Y)$ admet une espérance, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) P((X = x) \cap (Y = y)).$$

Remarque. Cette propriété entraîne également la linéarité de l'espérance.

2.3 Covariance

Proposition et définition E3.33

Soit X et Y deux VA indépendantes. La **covariance** de X et Y est définie par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

On dit que X et Y sont **décorrélées** lorsque $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Proposition E3.34

Soit X, Y des VAR.

(i) La covariance est **bilinéaire**, *i.e.* pour X_1, X_2, Y_1, Y_2 des VAR et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\operatorname{Cov}(X_1, Y) + b\operatorname{Cov}(X_2, Y),$$
$$\operatorname{Cov}(X, aY_1 + bY_2) = a\operatorname{Cov}(X, Y_1) + b\operatorname{Cov}(X, Y_2).$$

(ii) La covariance est **symétrique**, *i.e.* $\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(Y, X)$.

(iii) $\operatorname{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$ et $\operatorname{Cov}(X, X) = 0$ si et seulement si X suit une loi certaine.

Proposition E3.35

Soit X, Y deux VAR.

(i) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\operatorname{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$.

(ii) $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y)^2$.

(iii) $|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Proposition E3.36

Soit X et Y deux VA indépendantes.

(i) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,

(ii) $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$,

(iii) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

2.4 n-uplets de variables aléatoires

Définition E3.37

Des VA $X_1, \ldots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** lorsque

$$\forall (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega)),\ P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Proposition E3.38

Soit $X_1, \dots, X_n$ des VA. On a équivalence entre

(i) les $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes,

(ii) pour tout $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les $(X_i \in A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants,

(iii) pour tout $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, les $(X_i = x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.

Théorème E3.39

Soit $X_1, \dots, X_n$ des VA mutuellement indépendantes.

(i) Soit $1 \leqslant m \leqslant n$. Les VA $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Soit $f_1, \dots, f_n$ des applications. Les VA $(f_i(X_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes.

(iii) Lemme des coalitions. Soit I et J non vides tels que $[\![1, n]\!] = I \sqcup J$ et F, G deux applications. Alors les VA $F((X_i)_{i \in I})$ et $G((X_j)_{j \in J})$ sont indépendantes.

Théorème E3.40

Soit $p \in [0, 1]$, $X_1, \dots, X_n$ des VA mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Méthodes

- Mettre en relation la loi et la fonction de répartition d'une variable aléatoire finie.
- Établir la loi, l'espérance d'une variable aléatoire de la forme $Y = g(X)$.
- Déterminer la loi d'un couple (X, Y) de V.A.
  - ➢ lorsque X et Y sont connues et indépendantes,
  - ➢ lorsqu'on connaît la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant les événements $(X = x)$.
- Déterminer les lois marginales connaissant la loi d'un couple de V.A.
- Déterminer la loi d'une fonction d'un couple
  - ➢ dans le cas des fonctions min, max avec la fonction de répartition,
  - ➢ dans le cas de la somme par produit de convolution.
- Déterminer l'espérance d'une fonction d'un couple
  - ➢ par calcul direct,
  - ➢ par théorème de transfert.