TD et quelques solutions de mathématiques

Paul Valery

2024 – 2025

MPSI

Clément Dunand

Table des matières

Première partie

De rerum calculandi

TD A1. Ensembles de nombres

1 Égalités, inégalités

Exercice A1.1

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $1 \leqslant a \leqslant 4$ et $3 \leqslant b \leqslant 5$. Encadrer $a - b$, $(a-b)^2$ et $\dfrac{ab}{a+b}$.

Exercice A1.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{8-x} = x - 2$,
2. $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$,
3. $x + 1 < \sqrt{x+4}$,
4. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > 2x + 1$.

Exercice A1.3

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $|4 - x| = x$,
2. $|x^2 + x - 3| = x$,
3. $|-3x+4| + |5-x| = 10$,
4. $|x-3| = |2x+1|$,
5. $\sqrt{1-2x} = |x+7|$,
6. $x|x| = 3x + 2$.

Exercice A1.4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{4x-1}{2x+1} \geqslant 1$,
2. $|x-3| \leqslant 1$,
3. $|3x-2| \geqslant 4$,
4. $|x-2| > 2x - 1$,
5. $|x^2 - 6x + 4| \leqslant 1$,
6. $|2x - 11| < |x-5|$,
7. $|x+3| > |x^2 - 3|$,
8. $\sqrt{|x+2|} > |x - 10|$.

Exercice A1.5

Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leqslant y$, on définit $A = \dfrac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$ et $H = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$. Montrer que

$$x \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant y.$$

Exercice A1.6

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On note $m = \min\{x, y\}$ et $M = \max\{x, y\}$ respectivement le plus petit et le plus grand de ces deux nombres.

1. Exprimer $m + M$ et $M - m$ en fonction de x et y, faisant éventuellement apparaître une valeur absolue.
2. En déduire une expression de m et M en fonction de x et y.

Exercice A1.7

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et étudier le cas d'égalité.
2. Démontrer que $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

2 Nombres rationnels

Exercice A1.8 ✿

Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde les propositions suivantes.

1. Le produit d'un nombre rationnel non nul par un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
2. La racine carrée d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
3. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice A1.9 ✿✿

Soit $a = 20 + 14\sqrt{2}$ et $b = 20 - 14\sqrt{2}$.

1. Justifier que a et b sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt[3]{ab}$.
3. On note $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$. En exprimant c^3, montrer que c est rationnel.

3 Parties entières

Exercice A1.10

Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Exercice A1.11 ✿

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice A1.12 ✿✿

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$.

Sol A1. Ensembles de nombres

Solution A1.5

Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leqslant y$, on définit $A = \dfrac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$ et $H = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$.

- $x \leqslant y$ donc $x + y \leqslant 2y$, donc $A \leqslant y$.
- $A - G = x + y - \sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$ donc $A \geqslant G$.
- $\dfrac{1}{H} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x+y}{xy}$ donc $\dfrac{1}{H} - \dfrac{1}{G} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{xy} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2xy} \geqslant 0$. Donc $\dfrac{1}{H} \geqslant \dfrac{1}{G}$, donc $H \leqslant g$.

  Remarque. On peut aussi appliquer l'inégalité précédente avec $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, qui vérifient que $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
- $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$ donc $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{2}{x}$. Donc $\dfrac{1}{H} \leqslant \dfrac{1}{x}$, *i.e.* $H \geqslant x$.

On a montré (de droite à gauche) les inégalités constituant la propriété :

$$x \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant y.$$

Solution A1.11

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$.
   D'autre part, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc $-2x \leqslant -2\lfloor x \rfloor < -2x + 2$.
   En sommant ces deux encadrements :

   $$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2.$$

   Or $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier, donc $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
2. On note $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x, à savoir $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.

   1^er^ cas : $\{x\} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$. Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2}$.

   On a alors $2\lfloor x \rfloor \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1$, d'où par définition $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

   Par ailleurs $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2} \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$, donc *a fortiori* $\lfloor x \rfloor \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$ et donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

   Finalement, on a bien $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

   2^e^ cas : $\{x\} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$. Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

   On a alors $2\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$, d'où par définition $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.

   Par ailleurs $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + \dfrac{3}{2}$, donc *a fortiori* $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 2$ et donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

   Finalement, on a bien $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor 2x \rfloor$.

TD A2. Trigonométrie

Exercice A2.1

1. À quelle condition a-t-on la relation $\cos t = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2t)}{2}}$?
2. Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice A2.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $]-\pi,\pi]$ les équations suivantes.

1. $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
2. $\cos(3x) = \sin x$,
3. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

Exercice A2.3 ✲

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Écrire sous forme de produit : $S = \cos x + 2\cos(2x) + \cos(3x)$.
2. Résoudre alors l'équation $S = 0$ pour $x \in]-\pi,\pi]$.

Exercice A2.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$,
2. $\sin x > -\dfrac{1}{2}$,
3. $|\sin(3x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice A2.5 ✲

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\sin x + \sin(2x) = 0$,
2. $\tan(2x) = 3\tan x$,
3. $3\tan x = 2\cos x$.

Exercice A2.6 ✲

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(nt)| \leqslant n|\sin t|$.

Exercice A2.7 ✲✲

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a.$$
2. Si $\tan a$ et $\tan b$ sont bien définis, montrer que
$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \frac{1-\tan^2 a\tan^2 b}{(1+\tan^2 a)(1+\tan^2 b)}.$$

Sol A2. Trigonométrie

Exercice A2.8

1. À quelle condition a-t-on la relation $\cos t = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2t)}{2}}$?
2. Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice A2.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $]-\pi,\pi]$ les équations suivantes.

1. $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
2. $\cos(3x) = \sin x$,
3. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

Exercice A2.10 ✿

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Écrire sous forme de produit : $S = \cos x + 2\cos(2x) + \cos(3x)$.
2. Résoudre alors l'équation $S = 0$ pour $x \in]-\pi,\pi]$.

Exercice A2.11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$,
2. $\sin x > -\dfrac{1}{2}$,
3. $|\sin(3x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice A2.12 ✿

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\sin x + \sin(2x) = 0$,
2. $\tan(2x) = 3\tan x$,
3. $3\tan x = 2\cos x$.

Exercice A2.13 ✿

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(nt)| \leqslant n|\sin t|$.

Exercice A2.14 ✿✿

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a.$$
2. Si $\tan a$ et $\tan b$ sont bien définis, montrer que
$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \frac{1-\tan^2 a \tan^2 b}{(1+\tan^2 a)(1+\tan^2 b)}.$$

TD A3. Calculs algébriques

1 Sommes et produits

Exercice A3.1 ✲

Montrer que pour tout $n > 1$ entier, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$.

Exercice A3.2 ✲

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'éléments de $[0,1]$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1-a_k).$$

Exercice A3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$,
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3^k - 2k + n - 1)$,
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$,
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2$ (de deux manières différentes),
5. ✲ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ (poser $j = k-1$),
6. ✲ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$,
7. ✲ $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} |n-k|$,

Exercice A3.4

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. ✲ Déterminer deux réels c et d tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{c}{k} + \dfrac{d}{k+2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice A3.5 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement d'indice $j = n-k$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice A3.6 ✲

1. Rappeler pourquoi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Exercice A3.7 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n)$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \max(k,n)$.

Exercice A3.8

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$,
2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$,
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice A3.9

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire les expressions suivantes avec le symbole produit puis à l'aide de factorielles.

1. $A = (p+1)(p+2)\dots(p+n)$,
2. $B = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2p$,
3. $C = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)$.

Exercice A3.10 ✲✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$.

2 Coefficients binomiaux

Exercice A3.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

Exercice A3.12 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ (formule du Chef).
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice A3.13 ✲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{2k}$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{2k+1}$.

1. Exprimer $(1+\sqrt{2})^n$ et $(1-\sqrt{2})^n$ à l'aide de A et B.
2. En déduire les valeurs de A et B.

3 Sommes doubles

Exercice A3.14 ✱

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{2i-j}$,
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i$,
3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$,
4. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)$,
5. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (ij)$,
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$.

Exercice A3.15 ✱

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$.

Exercice A3.16

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Sol A3. Calculs algébriques

Solution A3.17

M1 par récurrence.

M2 Soit $n > 1$. $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{1}{k(k^2-1)} = \dfrac{1/2}{k-1} + \dfrac{-1}{k} + \dfrac{1/2}{k+1}$ (facile à vérifier, mais si on ne l'a jamais rencontré, la première méthode est préférable).
Puis on met en lumière deux télescopages :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k-1} + \frac{-1}{k} + \frac{1/2}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k} \right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k+1} - \frac{1/2}{k} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \\
&= \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Solution A3.6

1. Voir TD A1.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{2x}{2^{k+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \text{ d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

On reconnaît un télescopage. Ainsi $\boxed{S = \left\lfloor \dfrac{2x}{2^{n+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor}$.

L'intérêt de ce résultat grandit lorsqu'on examine sa limite : cette somme tend, quand n tend vers $+\infty$, vers $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor$.

Solution A3.16

Soit $n \in \mathbb{N}$. On va décomposer $[\![0, n^2-1]\!] = \{0\} \cup [\![1, 3]\!] \cup [\![4, 8]\!] \cup \ldots$. Autrement dit

$$[\![0, n^2-1]\!] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [\![i^2, (i+1)^2 - 1]\!].$$

Or pour $i \in [\![0, n^2 - 1 : \forall k \in [\![i^2, (i+1)^2 - 1]\!], \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = i$.
En effet $i^2 \leqslant k < (i+1)^2$, d'où $i \leqslant k < i+1$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ((i+1)^2 - i^2) i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) i \\
&= 2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

La simplification est laissée au lecteur.

TD A4. Nombres complexes

1 Forme algébrique, conjugué, module

Exercice A4.1

Donner la forme algébrique de

1. $\dfrac{3+5i}{5-3i}$,
2. $(2-i)^3$.

Exercice A4.2

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b le nombre

$$A = (2a - b - i(a+b))(-a - i(a+b))$$

est-il un nombre réel ?

Exercice A4.3

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ tels que $1 + z_1 z_2 \neq 0$. Montrer que $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Exercice A4.4

Démontrer que si $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} - nz^n = 0$, alors $|z| \leqslant 1$.

Exercice A4.5

Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

1. $|z-1| = 3$,
2. $|z+i| \leqslant 2$,
3. $|z| = |z-4|$

Exercice A4.6

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

1. Montrer que $\dfrac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$.
2. Quel est le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0$.

Exercice A4.7

Trouver tous les complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ aient le même module.

Exercice A4.8

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on définit $z' = \dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que

1. $|z'| = 1$,
2. $|z'| = 2$,
3. $z' \in \mathbb{R}$,
4. $z' \in i\mathbb{R}$.

Exercice A4.9 ✲✲

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $|z+1| = |z| + 1$,
2. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

Exercice A4.10

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 + (-2+i)z - 1 + 5i = 0$,
2. $z + \dfrac{1}{z} = 0$,
3. $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$,
4. $2z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0$,

2 Forme trigonométrique

Exercice A4.11

Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = (1 + i\tan t)^2$.

Exercice A4.12

Déterminer les parties réelle, imaginaire, module et argument de

1. $2 + 2i$,
2. $\dfrac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}}$,
3. $\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$,
4. $-2(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})$.

Exercice A4.13 ✲

Calculer

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i}{2-i}\right)^{17}$$

Exercice A4.14 ✲

Soit t un réel non congru à π modulo 2π. Déterminer le module et un argument de

1. $1 + e^{it}$,
2. $i - e^{it}$,
3. $\dfrac{1-i}{1+e^{it}}$.

Exercice A4.15

Déterminer le module et un argument de

1. $(1+i)^n + (1-i)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$,
2. $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$.

Exercice A4.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $z^6 = -1$,
2. $z^4 + 4 = 0$,
3. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$,
4. $\overline{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$.

Exercice A4.17

Linéariser les fonctions suivantes.

1. $f : t \mapsto \cos^4 t$,
2. $g : t \mapsto \sin^5 t$,
3. $h : t \mapsto \sin^3 t \cos t$,
4. $k : t \mapsto \cos(3t)\sin^3(2t)$.

Exercice A4.18

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\cos(x)$:
   (a) $\cos(5x)$,
   (b) $\sin(6x)\sin(x)$.
2. Exprimer en fonction de $\sin(x)$:
   (a) $\sin(7x)$,
   (b) $\sin(3x)\cos(2x)$.

Exercice A4.19 ✿

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kt)$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kt)\cos^k t$.

Exercice A4.20 ✿✿

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Simplifier $A = \displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$.

Exercice A4.21 ✿✿

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer, à l'aide des formules d'Euler, qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b\sin t = A\cos(t-\varphi).$$

Exercice A4.22 ✿✿

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le nombre $z = \left(\dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un nombre réel positif ?

Exercice A4.23 ✲

Le but est de calculer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \omega^k$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 = 0$.
3. À l'aide de formules trigonométriques, exprimer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. En déduire une équation du second degré dont $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution.
5. Conclure

Exercice A4.24

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module 1. Déterminer une forme trigonométrique de $1 + z + z^2$.

Exercice A4.25

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $e^z = 1 + i$,
2. $e^z = -5 - 12i$,
3. $e^z + e^{-z} = 1$,
4. $e^z + 2e^{-z} = i$.

Exercice A4.26 ✲✲

Soit A, B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes a, b et c. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-c} = j$ ou j^2.
2. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
3. Soit ABC un triangle quelconque. On construit trois triangles équilatéraux à l'extérieur de celui-ci, de bases $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Montrer que les centres de gravité I, J et K de ces triangles forment à leur tout un triangle équilatéral. *Remarque : le centre de gravité de 3 points d'affixes z_1, z_2 et z_3 est défini comme le point d'affixe* $\dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

Sol A4. Nombres complexes

Solution A4.15

1. $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1+i)^n=\sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}$.
   On remarque que $(1+i)^n=\overline{(1-i)^n}$, donc $(1+i)^n+(1-i)^n=2\,\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}\right)$.
   Donc $(1+i)^n+(1-i)^n=\sqrt{2}^n\times 2\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.
   À distinguer suivant les valeurs de n (le reste de sa division par 8) :
   - Si $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)>0$, alors c'est le module et l'argument est nul,
   - Si $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)<0$, alors le module est son opposé et l'argument vaut π,
   - Si $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, le module est nul et il n'y a pas d'argument.
2. Avec $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, le nombre à calculer B vaut :
   $B=\dfrac{4e^{i\pi}}{2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}}+\dfrac{4e^{-i\pi}}{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}=\sqrt{2}e^{i\pi/4}+\sqrt{2}e^{-i\pi/4}=2\sqrt{2}\cos(\pi/4)=2.$

Exercice A4.17

1. On utilise Euler puis la formule du binôme (puissance 4), enfin à nouveau Euler (avec $\cos(4t)$ et $\cos(2t)$).
   $f(t)=\dfrac{1}{8}\cos(4t)+\dfrac{1}{2}\cos(2t)+\dfrac{3}{8}.$
2. Même démarche : $g(t)=\dfrac{1}{16}\sin(5t)-\dfrac{5}{16}\sin(3t)+\dfrac{5}{8}\sin(t)$.
3. Tout d'abord $\sin^3(t)=-\dfrac{1}{4}\sin(3t)+\dfrac{3}{4}\sin(t)$. Puis on multiplie par $\cos(t)$ et on utilise les formules de linéarisation.
   Ou bien on s'arrête aux exponentielles : $\sin^3(t)\cos(t)=-\dfrac{1}{16i}(e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it})(e^{it}+e^{-it})$ et on développe puis on utilise Euler (avec $\sin(4t)$ et $\sin(2t)$).
   Les deux voies mènent à $h(t)=-\dfrac{1}{8}\sin(4t)+\dfrac{1}{4}\sin(2t)$.
4. $k(t)=-\dfrac{1}{8}\sin(9t)+\dfrac{3}{8}\sin(5t)+\dfrac{1}{8}\sin(3t)-\dfrac{3}{8}\sin(t)$.

Exercice A4.18

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\cos(x)$:
   (a) $\cos(5x)+i\sin(5x)=(\cos(x)+i\sin(x))^5$ et on développe avec la formule du binôme.
   La partie réelle donne $\cos(5x)=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x$. Puis on remplace $\sin^2$ par $1-\cos^2$ (et donc bien sûr $\sin^4$ par $(1-\cos^2)^2$).
   Après regroupements : $\cos(5x)=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$.
   (b) $\sin(6x)\sin(x)=-32\cos^7 x+64\cos^5 x-38\cos^3 x+12\cos x$.
2. Exprimer en fonction de $\sin(x)$:
   (a) Même chose en remplaçant cette fois $\cos^2$ par $1-\sin^2$.
   $\sin(7x)=-64\sin^7 x+12\sin^5 x-56\sin^3 x+7\sin x$.
   (b) $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x$ et $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$.
   D'où $\sin(3x)\cos(2x)=8\sin^5 x-10\sin^3 x+3\sin x$.

Deuxième partie

De analysi

TD B1. Études de fonctions

1 Généralités

Exercice B1.1 ⚙

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 3 \quad \text{et} \quad f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Montrer que f est 4-périodique.

Exercice B1.2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec D centré en 0. Montrer les assertions suivantes.

1. Si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire.
2. Si f est impaire et g est paire alors $g \circ f$ est paire.
3. Si f est paire alors $g \circ f$ est paire.

Exercice B1.3

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser les différentes fonctions la constituant, ainsi que les opérations (somme, produit, quotient, composée) mises en jeu. Donner alors son ensemble de définition.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x^2-7}{2x+3}$,
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x^2-7}{x^2-1}$,
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x+4}$,
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-4}$,
5. $f_5 : x \mapsto \sqrt{-x^2+3x+4}$,
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x-7}}$,
7. $f_8 : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$,
8. $f_9 : x \mapsto \ln(e^x - 1)$,
9. $f_{10} : x \mapsto \ln(x - x^2)$,
10. $f_{11} : x \mapsto \sqrt{x}\ln(4x^2-3)$,
11. $f_{12} : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2-1})$.

2 Limites

Exercice B1.4

1. Détermier
   (a) les limites en 0^+ et $+\infty$ de $\sqrt{\dfrac{9x+2}{x}}$
   (b) les limites en 1^+ et 1^- de $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-1}$ et de $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.
2. Déterminer les limites
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$,
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$,
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$.

(d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}\ln(x^3)}{x^4}$,

(e) $\lim_{x\to 0^-} x^3 e^x (\ln(-x))^2$,

(f) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

Exercice B1.5 ✲

Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-2x-1}{x-3}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{3x^2+1}{x-2}$.

3 Dérivation

Exercice B1.6

Sous réserve d'hypothèses suffisantes de dérivabilité :

1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.
2. Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction T-périodique ?

Exercice B1.7

1. Soit $f : x \mapsto x^3 - x + 1$. Déterminer les points où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$. Déterminer les points où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice B1.8 ✲

1. Déterminer, suivant la valeur du réel α : $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ puis en déduire $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

4 Fonctions usuelles

Exercice B1.9 ✲

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,
$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Exercice B1.10 ✿✿ *(Caractérisations du logarithme, tome 1)*

Étant donné un intervalle I, on cherche les fonctions f non nulles et dérivables sur I telles que

$$\forall (x,y) \in I,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que si f est définie en 0, alors f est la fonction nulle.
2. On considère à partir de maintenant que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(1)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $g(y) = f(xy)$. Calculer une expression de g' et en déduire celle de f'.
4. Donner les fonctions solutions du problème.

Exercice B1.11 ✿✿ *(Caractérisations du logarithme, tome 2)*

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On note f la primitive de $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ s'annulant en $x = 1$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = f(xy)$. Calculer une expression de g' puis de f'.
2. En déduire que $g - f$ est constante puis que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice B1.12 ✿✿

Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{(1-x)} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice B1.13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou dans le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui convient) les équations, inéquations ou systèmes suivants.

1. $\sqrt{19-x} + \sqrt{97+x} = 14$,
2. $|2x-4| \leqslant |x-1|$
3. $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$,
4. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
5. $5^x - 5^{x-1} - 2^{3x-1} = 0$,
6. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$,
7. $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$,
8. $\begin{cases} x + y = 52 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$,
9. $\log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{5}{2}$,
10. $\tan(3 \operatorname{Arcsin} x) = 1$,
11. $\operatorname{ch} x = a$,
12. $5 \operatorname{ch} x - 3 \operatorname{sh} x = 4$.

Exercice B1.14 ✿

Étudier les fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \ln(\ln x)$,
2. $f_2(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$,
3. $f_3(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$,
4. $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$,
5. $f_5(x) = \tan x + \dfrac{1}{\tan x}$,
6. $f_7(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.

Exercice B1.15 ✿

Calculer le maximum pour $n \in \mathbb{N}^*$ de $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice B1.16 ✿✿

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > -1$. Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$.
2. En déduire que pour tous $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^\alpha.$$

5 Trigonométrie réciproque

Exercice B1.17 ✲

Étudier les fonctions $\operatorname{Arcsin}\circ\sin$, $\operatorname{Arccos}\circ\cos$ et $\operatorname{Arctan}\circ\tan$.

Exercice B1.18 ✲

Déterminer $\operatorname{Arctan}(1)+\operatorname{Arctan}(2)+\operatorname{Arctan}(3)$.

Exercice B1.19 ✲

Calculer

1. pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\operatorname{Arctan} x)$ et $\cos(\operatorname{Arctan} x)$,
2. pour $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$,
3. pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(1/x)$.

Exercice B1.20 ✲✲ *(Formule de Machin)*

1. Montrer que $\operatorname{Arctan}(1/2)+\operatorname{Arctan}(1/3) = \pi/4$.
2. Lorsqu'il est défini, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.
3. En déduire que $\pi/4 = 4\operatorname{Arctan}(1/5) - \operatorname{Arctan}(1/239)$.

Exercice B1.21 ✲✲

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice B1.22 ✲✲

1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.
2. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

Exercice B1.23 ✲✲✲

Soit $x_1, \ldots, x_7$ sept nombres réels distincts. Montrer qu'il existe i, j deux entiers (avec $1 \leqslant i < j \leqslant 7$) tels que $0 < \dfrac{x_i - x_j}{1+x_i x_j} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6 Trigonométrie hyperbolique

Exercice B1.24 ✿

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Établir des relations entre $\mathrm{ch}(a+b)$, $\mathrm{sh}(a+b)$ et les quantités $\mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{ch}(b)$, $\mathrm{sh}(a)$, $\mathrm{sh}(b)$.
2. Montrer que $\mathrm{ch}(2a) = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2(a)$.

Exercice B1.25 ✿✿

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(2kx) = \frac{\mathrm{sh}\left((n+1)x\right)}{\mathrm{sh}\, x}\,\mathrm{ch}(nx).$$

Exercice B1.26 ✿✿

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{5x} + e^{-x}}{e^{4x} - 1}$.

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(3x)}{\mathrm{sh}(2x)} = \dfrac{4\,\mathrm{ch}^2(x) - 3}{2\,\mathrm{sh}(x)}$.
2. Étudier f.

Exercice B1.27 ✿✿✿

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{sh}\, x \geqslant x$ et $\mathrm{ch}\, x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\,\mathrm{th}\, x| \geqslant \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

Exercice B1.28 ✿✿

Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\, x) = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x}\right)$.

7 Bijections

Exercice B1.29 ✿✿

1. Soit $u, v \in [-1, 1]$ tels que $u^2 + v^2 = 1$. Justifier qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \cos(\varphi) = u \\ \sin(\varphi) = v \end{cases}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b \sin t = A\cos(t - \varphi).$$

Exercice B1.30 ✿

Montrer que sh est bijective et effectuer l'étude complète de sa bijection réciproque.

Exercice B1.31

Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier qu'elle est bijective en déterminant sa bijection réciproque.

1. $f_1 : x \mapsto 3x - 5$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
2. $f_2 : x \mapsto x^2 + 1$, de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$,
3. $f_3 : x \mapsto x^3 - 1$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-1, +\infty[$,
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x-3}{x-2}$, de $]2, +\infty[$ dans $]-\infty, 1[$,
5. $f_5 : x \mapsto e^{x+1}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$,
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x - 4}{e^x + 2}$, de $\mathbb{R}$ dans $]-2, 1[$.

Exercice B1.32

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction dérivable strictement décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $[0,1]$.

Exercice B1.33 ✲✲

Combien la fonction $x \mapsto (x-1)e^x - ex + 1$ a-t-elle de zéros ?

Exercice B1.34 ✲

Soit $f : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2 - 1) \end{array}$.

1. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
3. Calculer f^{-1}.
4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'$ de deux manières différentes.

Sol B1. Études de fonctions

Exercice B1.14

Indications et résultats.

5. D'après l'ensemble de définition et de dérivabilité et les points d'annulation de la fonction tangente, f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$.
   f_5 est π-périodique car tan l'est donc on peut limiter l'étude à $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
   De plus f_5 est impaire donc on l'étudie sur $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   En 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, on a une limite égale à $+\infty$, d'où une asymptote verticale.
   $\forall x \in I,\ f_5'(x) = 1 + \tan^2 x - \dfrac{1+\tan^2(x)}{\tan^2 x} = \dfrac{\tan^4 x - 1}{\tan^2 x}$.
   f_5' est négative sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, positive sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, nulle en $\dfrac{\pi}{4}$.
   D'où les variations de f_5 sur I, décroissante puis croissante, avec un minimum égal à 2 en $\dfrac{\pi}{4}$.
6. f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car ch l'est et ln l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $coh(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   f_7 est paire, donc on fait l'étude sur $\mathbb{R}_+$.
   On a $f_7(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
   On peut préciser avec une asymptote oblique : $f_7(x) - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\ln(2)$, donc $x \mapsto x - \ln(2)$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_{f_7}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_7'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{th}(x)$.
   f_7 est positive sur $\mathbb{R}_+$, s'annule en 0, donc f_7 est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec un minimum égal à 0 et 0.

Exercice B1.30 ✱

On a vu que sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. On note argsh sa bijection réciproque.
On sait déjà que argsh est strictement croissante, on connaît ses limites.
De plus sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas donc argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsh}'(x) = \dfrac{1}{sh'(\mathrm{argsh}\, x)} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x)}$.
Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}\, x) - \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}\, x) = 1$, donc $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}\, x)} = \sqrt{1+x^2}$ car ch est à valeurs positives.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice B1.31

Dans tous les exemples on peut commencer par une étude de la fonction pour se convaincre qu'elle est bien bijective sur les ensembles de départ et d'arrivée annoncés. Résoudre l'équation par équivalences en vérifiant bien l'existence et l'unicité de la solution suffit aussi à établir le caractère bijectif.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} y = f_5(x) &\Leftrightarrow y = e^{x+1} \\ &\Leftrightarrow \ln(y) = x + 1 \text{ car } y > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \ln(y) - 1. \end{aligned}$$

Donc f_5 est bijective et $f_5^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x)-1 \end{array}$.

6. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times]-2,1[$.

$$\begin{aligned} y=f_6(x) &\Leftrightarrow y=\frac{e^x-4}{e^x+2} \\ &\Leftrightarrow y(e^x+2)=e^x-4 \\ &\Leftrightarrow e^x(y-1)=-2y-4 \\ &\Leftrightarrow e^x=\frac{-2y-4}{y-1} \text{ car } y\neq 1 \\ &\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{-2y-4}{y-1}\right) \text{ car } \frac{-2y-4}{y-1}>0 \text{ (à vérifier)} \end{aligned}$$

Donc f_6 est bijective et $f_6^{-1}: \begin{array}{rcl} :]-2,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\dfrac{-2x-4}{x-1}\right) \end{array}$.

Exercice B1.32

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction dérivable strictement décroissante. Montrer que l'équation $f(x)=x$ possède une unique solution dans $[0,1]$.

On étudie $g : x\mapsto f(x)-x$, dérivable sur $[0,1]$ comme différence de fonctions dérivables.
$\forall x\in[0,1]$, $g'(x)=f'(x)-1<0$ car f est décroissante, donc sa dérivée est négative.
De plus, $\forall x\in[0,1]$, $f(x)\in[0,1]$ donc $g(0)=f(0)\geqslant 0$ et $g(1)=f(1)-1\leqslant 0$.
Finalement, g est continue, strictement décroissante et $0\in[g(1),g(0)]$.
D'après le théorème de la bijection, $\exists!\alpha\in[0,1]$, $g(\alpha)=0$. Autrement dit $\exists!\alpha\in[0,1]$, $f(\alpha)=\alpha$.

Exercice B1.34

Soit $f: \begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2-1) \end{array}$.

1.
   - $x\mapsto x^2-1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $x^2-1\in\mathbb{R}_+^*$.
   - ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Par composition, f est dérivable.
   $\forall x\in]1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$.
2. $\forall x\in]1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}>0$ donc f est strictement croissante. De plus elle est continue sur $]1,+\infty[$.
   $f(x)\xrightarrow[x\to1]{}-\infty$ et $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ donc f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $J=\mathbb{R}$.
3. Soit $(x,y)\in]1,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y=f(x) &\Leftrightarrow e^y=x^2-1 \\ &\Leftrightarrow x^2=e^y+1 \\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{e^y+1} \text{ car } x>0. \end{aligned}$$

Finalement $f^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]1,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{e^x+1} \end{array}$.

4. $\boxed{\textbf{M1}}$ f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et f' ne s'annule pas, donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{f^{-1}(x)^2 - 1}{2f^{-1}(x)} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$.

   $\boxed{\textbf{M2}}$ $x \mapsto e^x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction racine carrée est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   D'après la formule de dérivée d'une composée, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$.

TD B2. Nombres réels et suites numériques

1 Suites usuelles

Exercice B2.1

Soit $C, N \in \mathbb{R}_+^*$. Donner dans chacun des cas l'expression de la suite (u_n) définie par les propriétés ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{N} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = C(1 - u_n) \end{cases}$.

Exercice B2.2

Donner dans chacun des cas l'expression de la suite (u_n) définie par les propriétés ci-dessous. Si nécessaire on distinguera les cas réel et complexe.

1. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$,
2. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$,
3. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$,
4. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$,

Exercice B2.3

Déterminer l'expression de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\begin{cases} u_0 = 0,\ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n + 3 \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - 1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} u_0 = 0,\ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n - v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{4}{3}u_n + \dfrac{5}{3}v_n \end{cases}$.

Exercice B2.4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$. Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(|u_n|)$ soit bornée.

Exercice B2.5 ✿✿

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{5} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lfloor 2u_n \rfloor + \dfrac{3}{5} \end{cases}$. Déterminer u_n en fonction de n.

2 Borne sup, borne inf

Exercice B2.6 ✿

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon) \Leftrightarrow a = 0$.

Exercice B2.7 ✲

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure le minimum et le maximum des ensembles suivants.

1. $[1,5[\cup]6,8[$,
2. $\left\{\dfrac{x^2+1}{x^2+2} \mid x \in \mathbb{R}_+\right\}$,
3. $\left\{1+\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
4. $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m} \mid (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$,
5. $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
6. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-3x+2<0\}$.

Exercice B2.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $E_n = \left\{k+\dfrac{n}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Montrer que $\inf(E_n) \geqslant 2\sqrt{n}$.
2. À quelle condition a-t-on $\min(E_n) = 2\sqrt{n}$?

Exercice B2.9 ✲

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = \dfrac{4}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

1. Déterminer l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. L'ensemble $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est-il borné ? Si oui déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice B2.10 ✲

Soit A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit

$$A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que $A+B$ est majoré et que $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$.

Exercice B2.11 ✲

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est majorée et que $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
2. Énoncer un énoncé analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Que peut-on dire de $A \cap B$?

Exercice B2.12 ✲✲

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Soit $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure notée b.
2. Montrer que $f(b) = b$. *(on pourra étudier les cas $f(b) < b$ et $f(b) > b$)*

Exercice B2.13 ✲✲

On considère l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0 \text{ et } x^2 \leqslant 2\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et la déterminer.
2. Soit M un nombre rationnel majorant de A. On pose $h = \dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{2}{u}\right)$.
   (a) Montrer qu'on a $M^2 > 2$, $0 < h < M$ puis $h^2 > 2Mh - M^2$ et enfin $h^2 > 2$.
   (b) Montrer que h est un nombre rationnel majorant de A.
   (c) En déduire que A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

3 Suites

Exercice B2.14

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Vrai ou faux ? (Justifier)

1. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) diverge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
4. Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors (u_n) est convergente.
5. Si (u_n) est convergente, alors $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice B2.15

Montrer à l'aide de la définition de la limite que

1. $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
2. $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
3. $\dfrac{n^2+1}{n^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice B2.16 ✿

Établir la convergence ou la divergence de chacune des suites définies par les expressions ci-dessous.

(a) $\dfrac{\sin n}{n}$,

(b) $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n}$,

(c) $\dfrac{n^2 - n\ln n}{n^2 + n(\ln n)^2}$,

(d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

(e) $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$,

(f) $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$,

(g) $n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice B2.17 *Critère de d'Alembert* ✿✿

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Dans le cas où $\ell = 1$, donner trois exemples de suite (u_n) tels que

   (a) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, (b) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, (c) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 28$.

Exercice B2.18

Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire.

Exercice B2.19 ✿

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$.

1. Montrer que si l'une de ces suites converge alors l'autre converge aussi.
2. En déduire que ces deux suites sont divergentes.

Exercice B2.20 *(Moyenne de Cesàro)* ✿✿✿

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n}\right)$ converge vers 0 également.
2. Même question dans le cas d'une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$ quelconque.
3. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers ℓ, alors $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge également vers ℓ.

Exercice B2.21 ✿

Soit (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que (S_n) converge.

Exercice B2.22 ✿

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 6$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 3 \end{cases}$.
Que dire des suites (u_n) et (v_n) ? Le montrer.

Exercice B2.23 ✿✿

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^n + nx - 1 = 0$ possède une unique solution réelle. On note x_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est convergente vers 0.

Exercice B2.24 ✿✿

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $b_0 > a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.
2. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ.

Exercice B2.25 ✿

Étant donné un nombre $x \in \mathbb{R}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers x. Quel théorème cela permet-il de démontrer ?

Exercice B2.26

Montrer que de toute suite réelle non majorée on peut extraire une suite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice B2.27 ✿

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Vrai ou faux ? (Justifier)

1. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge.
2. Si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

Exercice B2.28 ✿✿✿

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(f(x)) = 6x - f(x)$.

Exercice B2.29 ✿

Soit $A = \left\{ \dfrac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N},\ k \in [\![0, 2^n]\!] \right\}$. Montrer que A est dense dans $[0, 1]$.

Sol B2. Nombres réels et suites numériques

Exercice B2.3

Indications et solutions.

1. Effectuer la somme et la différence des deux relations pour exprimer (u_n+v_n) (arithmético géométrique) et $(u_n - v_n)$ (arithmétique). Puis exprimer ces deux suites en fonction de n. En déduire les expressions de u_n et v_n pour tout n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n. On obtient $v_{n+2} = \dfrac{1}{3}v_n + \dfrac{2}{3}v_{n+1}$.
   Exprimer alors v_n en fonction de n pour tout n, puis utiliser $u_n = \dfrac{3}{4}\left(v_{n+1} - \dfrac{5}{3}v_n\right)$.
   Finalement (sauf erreur), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3}{4}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n - 1\right)$ et $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 3\right)$.

Exercice B2.7 ✵

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure le minimum et le maximum des ensembles suivants.

4. Soit $E_4 = \left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \mid (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.
   - $\sup(E_4) = 2$ car $\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \leqslant 2$ et $2 \in E_4$ (avec $m = n = 1$). C'est aussi un maximum.
   - $\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \geqslant 0$. Donc $\inf(E_4) \geqslant 0$.
     De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \in E_4$. Ainsi $\left(\dfrac{2}{n}\right)$ est une suite d'éléments de E_4 qui tend vers 0. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf(E_4) = 0$. E_4 n'a pas de minimum.
5. Soit $E_5 = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.
   $u_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$. Or $u_2 = \dfrac{3}{2}$. Donc $\sup(E_5) = \dfrac{3}{2}$. C'est aussi le maximum de E_5.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant -1$. Et $u_{2n+1} = -1 + \dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.
   D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf(E_5) = -1$. E_5 n'a pas de minimum.
6. Soit $E_6 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 3x + 2 < 0\}$.
   On résout l'inéquation : $E_6 = \mathbb{Q} \cap]1,2[$.
   $\forall x \in E_6$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.
   Comme $\mathbb{Q} \cap]1,2[$ est dense dans $[1,2]$ (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$), il existe une suite d'éléments de E_6 qui tend vers -1 et une autre qui tend vers 2.
   Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure/supérieure, on a $\sup(E_6) = 2$ et $\inf(E_6) = 1$. E_6 n'a ni maximum ni minimum.

Exercice B2.10

Soit A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}\,.$$

Soit $x \in A + B$. $\exists (a, b) \in A \times B$, $x = a + b$. Or $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$.
Donc $x \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Donc $A + B$ est majoré par $\sup(A) + \sup(B)$.
D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on dispose de $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^*$ telles que $a_n \to \sup A$ et $b_n \to \sup B$.
Alors $(a_n + b_n) \in (A + B)^{\mathbb{N}}$ et $a_n + b_n \to \sup A + \sup B$.
D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice B2.11

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in A \cup B$.
   Si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
   Si $x \notin A$, alors $x \in B$ et donc $x \leqslant \sup B \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
   Dans les deux cas, $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$, qui majore donc $A \cup B$.
   Notons $s = \max(\sup A, \sup B)$ et supposons que $s = \sup A$ (l'autre cas se traitera de manière analogue).
   Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété de la borne sup, on dispose de $a \in A$ tel que $a > s - \varepsilon$.
   Comme $a \in A \cup B$, cela donne aussi un élément de $A \cup B$ vérifiant $a > s - \varepsilon$.
   On a donc vérifié la caractérisation de la borne supérieure pour $A \cup B$. Ainsi $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
2. On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
3. Quant à $A \cap B$, on n'est pas sûr qu'il soit non vide.
   Cependant, si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cap B) \geqslant \max(\inf A, \inf B)$.

Exercice B2.17 *Critère de d'Alembert*

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1. Supposons $\ell < 1$. Soit $a \in]\ell, 1[$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell$ àpcr. Notons N un tel rang.
   $\forall k \geqslant N$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant a$. Comme $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} > 0$, on peut effectuer les produits : $\forall n > N$, $\displaystyle\prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \prod_{k=N}^{n-1} a$, *i.e.* $\dfrac{u_n}{u_N} \leqslant a^{n-N}$.
   Finalement $u_n \leqslant a^{n-N} u_N$ et par comparaison, comme $a < 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Même principe, les détails sont laissés au lecteur : on montre que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > b$ àpcr, avec $b > 1$, puis on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Dans le cas où $\ell = 1$, donner trois exemples de suite (u_n) tels que

   (a) $u_n = \dfrac{1}{n}$, (b) $u_n = n$, (c) $u_n = 28$.

Exercice B2.18

Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers ℓ.
Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ dans la définition : on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Soit $n \geqslant N$.

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= |u_{n+1} - \ell + \ell - u_n| \\ &\leqslant |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| \\ &\leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &\leqslant \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Or $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{Z}$ donc $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$, donc $|u_{n+1} - u_n| = 0$ et donc (u_n) est constante à partir du rang N.

Exercice B2.19

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$.

1. Supposons que $(\sin n)$ converge, disons vers ℓ. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$, d'où $\cos(n) = \dfrac{1}{\sin(1)}(\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)$ qui converge aussi, vers $\dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\ell$. Bien sûr ça marche pareil dans l'autre sens.
   Autrement dit, soit ces deux suites sont convergentes, soit elles sont toutes deux divergentes.
2. Supposons que $\cos n \to \ell_1$ et $\sin n \to \ell_2$.
   M1 : avec des formules trigo.
   Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(2n) = 2\sin(n)\cos(n)$, on a $\ell_2 = 2\ell_1\ell_2$, donc $\ell_2 = 0$ ou $\ell_1 = \dfrac{1}{2}$.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$, donc on a $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$.
   Ceci donne deux possibilités : soit $\ell_2 = 0$ et alors $\ell_1 = 1$, soit $\ell_1 = \dfrac{1}{2}$ et alors $\ell_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Mais on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$, d'où $\ell_1 = \ell_1^2 - 1$, compatible avec aucune des valeurs précédentes. Donc les deux suites sont divergentes.
   M2 : avec des extractions.
   On a aussi $\cos(n+1)$ et $\cos(n-1)$ qui tendent vers ℓ_1.
   Or $\cos(n+1) = \cos(1)\cos(n) - \sin(1)\sin(n)$ et $\cos(n-1) = \cos(1)\cos(n) + \sin(1)\sin(n)$.
   La somme de ces deux lignes donne $\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(1)cos(n)$ d'où, en passant à la limite : $2\ell_1 = 2\cos(1)\ell_1$, d'où $\ell_1 = 0$ car $\cos(1) \neq 0$.
   Mais alors $\cos(n+1) = \cos(1)\cos(n) - \sin(1)\sin(n)$ (par exemple) donne $\ell_2 = 0$, tout ceci étant contradictoire avec (par exemple) $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$, obtenu comme dans M1.

TD B3. Intégration et équations différentielles

1 Primitives

Exercice B3.1

1. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Que dire de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ si f est impaire ?
2. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice B3.2

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer sans utiliser la fonction ln que

$$\int_{1}^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{1}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Exercice B3.3

Calculer les intégrales ou déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. avec le moins de calcul possible :
   (a) $a : t \mapsto te^{t^2}$,
   (b) $b : t \mapsto \tan t$,
   (c) $C = \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{Arccos}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
   (d) $d : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$,
2. à l'aide d'intégrations par parties :
   (e) $e : t \mapsto t\ln t$,
   (f) $f : t \mapsto t\,\mathrm{Arctan}\,t$,
   (g) $g : t \mapsto \mathrm{Arccos}(2t)$,
   (h) $H = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} te^{t}$,
   (i) $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)$,
   (j) $j : t \mapsto (t^2 + 2t)e^{t}$,
   (k) $K = \displaystyle\int_{0}^{1} \cos(\pi t)e^{t}$,
3. à l'aide des changements de variables indiqués :
   (l) $L = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,\mathrm{d}t \quad (u = e^t)$,
   (m) $m : t \mapsto \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \quad (u = \cos(t))$,
   (n) $n : t \mapsto \sin^3 t \quad (u = \cos(t))$,
   (p) $p : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^4} \quad (u = t^2)$,
   (q) $q : t \mapsto \dfrac{1}{1+e^t} \quad (u = e^t)$.

Exercice B3.4 ✲

Calculer les intégrales ou une primitive des fonctions suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$,
3. $f : x \mapsto \sin^4 x$.

Exercice B3.5 ✲

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-3t+5}}$ à l'aide d'un changement de variable affine.
2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{5x+4}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,\mathrm{d}u$ à l'aide du changement de variable $u = \cos(2t)$

Exercice B3.6 ✲

Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2}$,
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$,
3. $h : x \mapsto \dfrac{12x+4}{x^2+1}$,
4. $i : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$,
5. $j : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$,
6. $k : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^8+1}$.

Exercice B3.7 ✲ *(Lemme de Riemann-Lebesgue)*

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$.

Exercice B3.8 ✲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$.

1. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_2.

Exercice B3.9 ✲✲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.
2. Calculer I_0 puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. Déterminer la limite de (I_n).

Exercice B3.10 ✲✲

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on définit $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
2. En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.
3. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$.

Exercice B3.11 ✪✪

Calculer une primitive de $t \mapsto \sin(\ln(t))$ sur un intervalle à préciser

1. à l'aide d'une fonction à valeurs complexes,
2. à l'aide d'une double intégration par parties.

Exercice B3.12 ✪✪

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $I(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, calculer $I(x)$.
2. Montrer que I est dérivable sur $]0, +\infty[$, la dériver et retrouver le résultat précédent.
3. Vérifier encore le résultat précédent à l'aide d'un calcul direct d'intégrale.

2 Équations différentielles

Exercice B3.13 ✪

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $e^x y' - xy = 0$,
2. $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
3. $\cos(x)y' - \sin(x)y = \tan x$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,
4. $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]0,1[$,
5. $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$.

Exercice B3.14 ✪✪

Résoudre et raccorder le cas échéant.

1. $x(x-4)y' + (x-2)y = 0$,
2. $xy' - 2y = x^4$,
3. $x^2 y' - y = x^2 - x$,
4. $(e^x - 1)y' - (e^x - 1)y = 3 + 2e^x$,
5. $(x-1)y' - 2y = (x-1)^3$.

Exercice B3.15 ✪

Résoudre sur $\mathbb{R}$.

1. $y'' + 2y' + 5y = 5x$,
2. $y'' - 2y' - y = e^x \sin x$,
3. $-2y'' + y' + y = -e^x$,
4. $y'' + 9y = x + 1$.

Exercice B3.16

Résoudre

1. $y'' - y = (3x^2 - 11x + 6)e^{-2x}$;
2. $y'' - 2(1+i)y' + 2iy = x + i$;
3. $y'' - 4y' + 3y = \sin x + \cos x$;
4. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$;
5. $y'' - y = x^2 \operatorname{sh} x$.

Exercice B3.17 ✻

Intégrer les systèmes différentiels (où les fonctions inconnues sont $t \mapsto x(t)$ et $t \to y(t)$.

1. $\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$, 2. $\begin{cases} x' = 7x - 5y \\ y' = 10x - 8y \end{cases}$, 3. $\begin{cases} x' - x = y \\ y' + y = 3x \end{cases}$.

Exercice B3.18 ✻✻ Soit l'équation différentielle

$$(x-1)y' + (x-2)y = x(x-1)^2.$$

1. Montrer (sans résoudre l'équation différentielle) que toutes les courbes intégrales passent par un même point. Trouver le lieu des points de ces courbes où la tangente est horizontale.
2. Résoudre l'équation différentielle.

Exercice B3.19 ✻

Soit l'équation (E) : $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x$.

1. Vérifier que $x \mapsto e^x$ est solution de (E_0).
2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z : x \mapsto y(x)e^{-x}$ est solution d'une équation (E_1) que l'on déterminera.
3. Résoudre (E_1) et en déduire les solutions de (E).

Exercice B3.20 ✻✻

1. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f'(x) - f(-x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Exercice B3.21 ✻✻✻

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^2 y'' + y = 0$ à l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$.
2. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

TD B4. Continuité et dérivabilité

1 Limites

Exercice B4.1 ✵

Montrer à l'aide de la définition seulement que $x \mapsto x^2 + 2x$ a pour limite 3 quand x tend vers 1.

Exercice B4.2 ✵

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques qui convergent en $+\infty$.

Exercice B4.3 ✵

Montrer que $\dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$.

Exercice B4.4 ✵

Calculer les limites suivantes.

(i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6}$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln x}$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sin(1/x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \sin(1/x)$;

(iv) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \pi/3}$.

2 Continuité

Exercice B4.5 ✵

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^x \text{ si } x > 0 \\ \dfrac{xe^x}{1 - e^x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice B4.6 ✵

Étudier la continuité et l'éventuel prolongement par continuité des fonctions suivantes.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x^3+1} \end{array}$,

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$,

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2} \end{array}$.

Exercice B4.7 ✵

Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point. On rappelle que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice B4.8 ✵

Montrer que deux fonctions continues qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ coïncident sur $\mathbb{R}$.

Exercice B4.9 ✲

1. Trouver toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2) = f(x)$.
2. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que $f(3x) = f(x)$.

Exercice B4.10 ✲✲

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 1 telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x+3}{4}\right)$.

Exercice B4.11 ✲✲

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice B4.12 ✲

Montrer qu'il existe à tout instant deux points diamétralement opposés sur l'équateur où les températures sont égales.

3 Dérivabilité

Exercice B4.13

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}$.

Exercice B4.14

Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f, montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement avec

(i) $f(x) = x\sin(1/x)$;

(ii) $f(x) = \dfrac{x^4}{e^x - 1}$.

Exercice B4.15 ✲

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = e^{-1/x}$ et $g(x) = f(x)/x$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $xf'(x) = g(x)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.
3. Faire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice B4.16 ✲✲

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin x} \text{ si } x \in]0, \pi/2] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0.

Exercice B4.17 ✲

Montrer que $x \mapsto x^x$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice B4.18 ✿

1. Exprimer la dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice B4.19 ✿

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice B4.20 ✿

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} (x^x)^x \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer f'.
2. f est-elle $\mathcal{C}^1$? deux fois dérivable ?

Exercice B4.21 ✿✿

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(b) < 0 < f'(a)$. Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

Exercice B4.22 ✿ *(Rolle généralisé)*

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice B4.23 ✿

Soit $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a, a + 2h[$ tel que

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice B4.24 ✿✿

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que f s'annule en au moins n points $a_1, \ldots, a_n$.

1. Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$.
   (a) Déterminer $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi : t \mapsto f(t) - A \prod_{i=1}^{n} (t - a_i)$ s'annule en x.
   (b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$.
2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leqslant \frac{M}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - a_i|.$$

Exercice B4.25 ✲

Calculer l'expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec

(i) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$; (ii) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$; (iii) $f : x \mapsto x^2 e^{3x}$.

Exercice B4.26 ✲

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de $x \mapsto x\ln(1+x)$.

Exercice B4.27 ✲

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de

1. $x \mapsto (x-1)e^{-x}$,
2. $x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$,
3. $x \mapsto x^n e^x$.

Exercice B4.28 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer de deux manières la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice B4.29 ✲✲

Soit $f : x \mapsto e^{x\sqrt{3}}\sin(x)$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, déterminer $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = Ae^{x\sqrt{3}}\sin(x+\varphi).$$

Exercice B4.30 ✲

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1} \end{cases}$.

1. Montrer que (u_n) est à valeurs dans $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha+1} = \alpha$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)|u_n-\alpha|$ puis en déduire la limite de (u_n).

Exercice B4.31 ✲

À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice B4.32 ✲

1. À l'aide d'un théorème des accroissements finis, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,
$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}.$$
2. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n>2}$ est divergente.

Sol B4. Continuité et dérivabilité

Exercice B4.34

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques qui convergent en $+\infty$.

Analyse. Soit f une telle fonction, notons ℓ sa limite en $+\infty$ et T sa période (positive). $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x + nT)$.

On fait tendre n vers $+\infty$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$. Donc f est constante.

Synthèse. Les fonctions constantes sont périodiques et convergent en $+\infty$.

Conclusion : les solutions du problème sont les fonctions constantes.

Exercice B4.35 ✲

Montrons que $f : x \mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$ en exhibant deux suites de valeurs avec des comportements différents.

- D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \dfrac{n^n}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} \\ &\geqslant \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} \text{ car } n \leqslant n + \frac{1}{2} \\ &\geqslant \frac{n^n n^{\frac{1}{2}}}{n^n} \\ &\geqslant n^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc $f\left(n + \dfrac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par comparaison.

Finalement, f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice B4.36

(i) $\dfrac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6} = \dfrac{\ln x}{2^x} \underbrace{\left(\quad \cdots \quad \right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$.

(ii) Multiplier numérateur et dénominateur par $x - 1$ pour faire apparaître deux taux d'accroissement en $x \to 1$. On peut aussi poser $x = 1 + h$ et raisonner en $h \to 0$. Cela donne $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln x} = \boxed{-1}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to0} x\sin(1/x) = \boxed{0}$ par encadrement et $\forall x \neq 0$, $x\sin(1/x) = \dfrac{\sin(1/x)}{1/x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin(1/x) = \boxed{1}$ par composition de limites.

(iv) $\dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \pi/3} = -2\,\dfrac{\sin(x - \pi/3)}{x - \pi/3} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{3}]{} \boxed{-2}$.

Exercice B4.37

- $\forall x > 0$, $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$. Or $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (croissances comparées). Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.
- $\forall x < 0$, $f(x) = \dfrac{xe^x}{1-e^x} = -\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)e^x$. Or $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (taux d'accroissement).
  Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$.

On ne peut donc pas prolonger f par continuité en 0.

Exercice B4.38

Étudier la continuité et l'éventuel prolongement par continuité des fonctions suivantes.

1. f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x+1} \xrightarrow[x\to -1]{} \dfrac{1}{3}$ donc f est prolongeable par continuité en -1 par la valeur $\dfrac{1}{3}$.
2. g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc g est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0.
3. h est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. h a une limite infinie en -1^+ et en -1^-. Donc h n'est par prolongeable par continuité en 0.
   $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $h(x) = \dfrac{x-1}{1-x^2} = \dfrac{-1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1]{-\frac{1}{2}}$ donc h est prolongeable par continuité en 1 par la valeur $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice B4.41

1. **Analyse** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [0,1]$, $f(x^2) = f(x)$.
   Soit $x \in [0,1[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^{2^n}) = f(x)$.
   L'initialisation est vraie car $f(x) = f(x)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f(x^{2^n}) = f(x)$.
   Alors $f(x) = f(x^{2^n}) = f\left((x^{2^n})^2\right) = f\left(x^{2^n} \times 2\right) = f\left(x^{2^n+1}\right)$.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{2^n})$.
   Par passage à la limite et continuité de f, $f(x) = f(0)$. Donc f est constante sur $[0,1[$.
   Finalement, par continuité, f est également constante sur $[0,1]$.
   Synthèse Les fonctions constantes sont continues et vérifient bien $\forall x \in [0,1]$, $f(x^2) = f(x)$.
   Trouver toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2) = f(x)$.
2. Même jeu avec $f(x) = f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$.

Exercice B4.54 (Rolle généralisé)

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.

- Si f est constante, tout $c \in [a,+\infty[$ convient.
- Sinon, il existe $x \in]a,+\infty[$, $f(x) \neq f(a)$.
  Soit γ strictement compris entre $f(a)$ et $f(x)$.
  Par théorème des valeurs intermédiaires sur $[a,x]$ d'une part et d'autre part sur $[x,+\infty[$ (voir exercice 9.3) : il existe $c_1 \in]a,x[$ et $c_2 \in]x,+\infty[$ tels que $f(c_1) = f(c_2) = \gamma$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à f, continue sur $[c_1,c_2]$ et dérivable sur $]c_1,c_2[$.

Dans tous les cas, il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice B4.59

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de

1. Soit $g : x \mapsto x - 1$ et $h : x \mapsto e^{-x}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $h^{(k)} : x \mapsto (-1)^k e^{-x}$ (récurrence).
   De plus, pour tout $k > 1$, $g^{(k)}$ est la fonction nulle.
   Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = (-1)^n (x-1) e^{-x} + (-1)^{n-1} n e^{-x}$. Donc $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x - 1 - n) e^{-x}$.
3. Soit $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto e^x$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $h^{(k)} : x \mapsto e^x$.
   De plus, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $g^{(k)} : x \mapsto \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ (récurrence).
   Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \binom{n}{k}^2 x^{n-k} \right) e^x \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \binom{n}{k}^2 x^k \right) e^x. \end{aligned}$$

Exercice B4.60

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^{2n}$.

D'une part, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!} x^n$.

D'autre part, $f(x) = x^n x^n$ et donc (formule de Leibniz) $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 n! x^n$.

En évaluant en $x = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

TD B5. Convexité

Exercice B5.1 ✿

1. Déterminer la convexité des fonctions suivantes :

   (a) sin,

   (b) ln,

   (c) tan,

   (d) exp

   (e) $x \mapsto x^p$ avec $p > 1$ entier,

   (f) $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

2. Déduire de résultats ci-dessus les inégalités suivantes.

   (a) $\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$,

   (b) $\forall x \in [0,1],\ x + 1 \leqslant e^x \leqslant 1 + x(e-1)$,

   (c) $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$,

   (d) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \forall p \geqslant 2,\ (a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p)$,

   (e) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{1}{2}(a+b)$,

   (f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset \mathbb{R}_+,\ \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Exercice B5.2 ✿✿

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $2^x + 2^{x^3} \geqslant 2^{x^2+1}$.

Exercice B5.3 ✿

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Exercice B5.4 ✿

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice B5.5 ✿✿

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Justifier l'existence de $M = \max\{|f''(x)|,\ x \in [a, b]\}$.
2. Soit $g : x \mapsto f(x) - M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$ et $h : x \mapsto f(x) + M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$. Montrer que g est convexe et h concave.
3. Montrer que

$$\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leqslant M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

Exercice B5.6 ✿

Soit f une fonction convexe et g une fonction croissante et convexe. Montrer que $g \circ f$ est convexe

- si l'on suppose f et g de classe $\mathcal{C}^2$,
- sans hypothèses de régularité.

Exercice B5.7 ✿✿✿

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall a, b \in [0,1],\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

TD B6. Comparaisons locales

1 Propriétés

Exercice B6.1

Soit f, g, h, k des fonctions définies sur D et $a \in \overline{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que

1. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
2. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $f \underset{a}{\sim} h$, alors $h \underset{a}{=} o(g)$,
3. si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
4. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
5. si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{=} O(h)$.

Exercice B6.2

Soit f, g deux fonctions définies sur I et $u : J \to I$ Soit $a \in \overline{J}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $u(t) \xrightarrow[x \to a]{} b$. Montrer que

1. si $f \underset{b}{=} o(g)$, alors $f \circ u \underset{a}{=} o(g \circ u)$,
2. si $f \underset{b}{=} O(g)$, alors $f \circ u \underset{a}{=} O(g \circ u)$,
3. si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $f \circ u \underset{a}{\sim} g \circ u$.

Exercice B6.3

Soit f, g, h, k des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose

(i) $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$,

(ii) $f \underset{a}{\sim} k$ et $h \underset{a}{\sim} k$.

Montrer que $g \underset{a}{\sim} k$.

Exercice B6.4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec 0 adhérent à I. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - (ax + b) \underset{x \to a}{=} o(x)$. Donner, éventuellement en fonction des valeurs de a et b, un équivalent de f en 0.

2 Calculs

Exercice B6.5

Classez par « ordre de négligeabilité » les suites :

1. $\left(\dfrac{1}{n}\right), \left(\dfrac{\ln n}{n}\right), \left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right), \left(\dfrac{1}{n^2}\right), \left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)$.
2. $(n), \left(\sqrt{n} \ln n\right), (n \ln n), \left(n^2\right), \left(\dfrac{n^2}{\ln n}\right)$.

Exercice B6.6 ✿

Déterminer un équivalent et la limite quand $n \to +\infty$ des suites suivantes :

(a) $n^2 - \ln(n^3+1)$,

(b) $n \ln\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$,

(c) $\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$,

(d) $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$,

(e) $n^{1/n} - 1$,

(f) $\ln(n+\sqrt{n^2+1})$,

(g) $\dfrac{\sin(1/n)+1}{\tan(\frac{1}{n^2})}$,

(h) $e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$,

(i) $\ln\left(\dfrac{n^2-n+5}{n^2+n-3}\right)$,

(j) $\tan\left(\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$.

Exercice B6.7 ✿

Donner des équivalents simples des expressions suivantes.

1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$,
2. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ en $+\infty$,
3. $x^{1/x} - 1$ en $+\infty$,
4. $\cos(\sin(x))$ en 0,
5. $\ln(\cos(28x))$ en 0,
6. $(x+\sin x)^{\frac{1}{3}}$ en 0.

Exercice B6.8 ✿✿

Soit $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln x}{e^x - 1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sqrt{1+\sin x} - 1}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+x^2-x)}{x^2(x-1)(x+2)}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to \alpha} \frac{x^\alpha - \alpha^x}{x^x - \alpha^\alpha}$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\lambda x}$.

Exercice B6.9 ✿

À quelle condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d a-t-on

$$\frac{1}{t^a(\ln t)^b} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^c(\ln t)^d}\right) ?$$

Exercice B6.10 ✿✿

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \neq 0$. Établir les équivalents suivants.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$,
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2 r}{2}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$,
4. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8n^2}$,

Exercice B6.11 ✿✿✿

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À l'aide d'équivalents, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(x+1))^\alpha - (\ln x)^\alpha$.

3 Problèmes d'analyse asymptotique

Exercice B6.12 ✿✿ **(Équivalent des intégrales de Wallis)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie l'intégrale définie par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t$. On admet que (W_n) est décroissante et minorée par 0, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

1. Montrer que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$ puis en déduire que $W_{n+1} \sim W_n$ (quand n tend vers $+\infty$).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = (n+1) W_n W_{n+1}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et préciser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n$.

Exercice B6.13 ✿✿ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $K_n = \displaystyle\int_0^1 e^t t^n \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (K_n) est décroissante et minorée par 0.
2. Pour tout $n > 0$, établir une relation entre K_n et K_{n+1}.
3. Montrer que (K_n) converge vers 0.
4. Montrer que $K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$.

Exercice B6.14 ✿✿

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer que (u_n) possède une limite et la déterminer.
2. Montrer que $\forall n > 2$, $u_n \leqslant \ln(2n)$ *(on pourra utiliser que* $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x$.
3. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
4. Montrer que $u_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice B6.15 ✿✿

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x - \ln x = n$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, cette équation admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n$.
4. Montrer que $x_n - n \sim \ln n$.

Exercice B6.16 ✿✿

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit x_n le nombre réel solution de $\tan x = x$ sur $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
2. Soit $y_n = x_n - n\pi$. Montrer que $y_n \sim \pi/2$.
3. Soit $z_n = y_n - \frac{\pi}{2}$. Montrer que $z_n \sim -\frac{1}{n\pi}$.

Sol B6. Comparaisons locales

Solution B6.6

(g) $\sin(1/n) \to 0$ donc $\sin(1/n) = o(1)$ donc $\sin(1/n) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Et $\dfrac{1}{n^2} \to 0$ donc $\tan(\dfrac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
Donc $\dfrac{\sin(1/n)+1}{\tan(\frac{1}{n^2})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\frac{1}{n^2}} = n^2$.

(h) Tout d'abord

$$\begin{aligned} e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}} &= \left(e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1\right) - \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1\right) \\ &= \left(e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1\right)\left(1 - \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1}{e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1}\right). \end{aligned}$$

Or $e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}$ car $\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Et $\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ car $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc $\dfrac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1}{e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\sqrt{\ln n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\left(1 - \dfrac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1}{e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Finalement $e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}$ comme vu précédemment.

(i) $\ln\left(\dfrac{n^2-n+5}{n^2+n-3}\right) = \ln\left(\dfrac{n^2+n-3-2n+8}{n^2+n-3}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{-2n+8}{n^2+n-3}\right)$. Or $\dfrac{-2n+8}{n^2+n-3} \to 0$.
Donc $\ln\left(\dfrac{n^2-n+5}{n^2+n-3}\right) \sim \dfrac{-2n+8}{n^2+n-3} \sim \dfrac{-2}{n}$.

(j) $\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \to 0$ donc $\tan\left(\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
$\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)\right)$ et $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \to 0$.
Donc $\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \sim \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.

Solution B6.8

Soit $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. $x^2 - x \xrightarrow[x\to1]{} 0$ donc $\ln(1+x^2-x) \underset{x\to1}{\sim} (x^2-x) = x(x-1) \underset{x\to1}{\sim} x-1$ car $x \xrightarrow[x\to1]{} 1$.
Au dénominateur, $x^2 \xrightarrow[x\to1]{} 1$ et $x+2 \xrightarrow[x\to1]{} 3$ donc $x^2(x-1)(x+2) \underset{x\to1}{\sim} 3(x-1)$.
Finalement $\dfrac{\ln(1+x^2-x)}{x^2(x-1)(x+2)} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{1}{3}$, autrement dit $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(1+x^2-x)}{x^2(x-1)(x+2)} = \dfrac{1}{3}$.

7.

$$\begin{aligned}\frac{x^\alpha-\alpha^x}{x^x-\alpha^\alpha} &= \frac{e^{\alpha\ln x}-e^{x\ln\alpha}}{e^{x\ln x}-e^{\alpha\ln\alpha}}\\ &= \underbrace{\frac{e^{\alpha\ln x}}{e^{\alpha\ln\alpha}}}_{\xrightarrow[x\to\alpha]{}1}\frac{1-e^{x\ln(\alpha)-\alpha\ln(x)}}{e^{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}-1}.\end{aligned}$$

Or $x\ln(\alpha)-\alpha\ln(x)\xrightarrow[x\to\alpha]{}1$ et $x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)\xrightarrow[x\to\alpha]{}1$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{x^\alpha-\alpha^x}{x^x-\alpha^\alpha} &\underset{x\to\alpha}{\sim} \frac{x\ln(\alpha)-\alpha\ln(x)}{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}\\ &= \frac{x\ln(\alpha)-\alpha\ln(\alpha)+\alpha\ln(\alpha)-\alpha\ln(x)}{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}\\ &= \frac{(x-\alpha)\left(\ln(\alpha)+\alpha\frac{\ln(\alpha)-\ln(x)}{x-\alpha}\right)}{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}.\end{aligned}$$

Deux taux d'accroissements : d'une part $\dfrac{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}{x-\alpha}\xrightarrow[x\to\alpha]{1}+\ln\alpha$ donc $\dfrac{x-\alpha}{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}\xrightarrow[x\to\alpha]{\frac{1}{1+\ln\alpha}}$;
d'autre part $\dfrac{\ln(\alpha)-\ln(x)}{x-\alpha}\xrightarrow[x\to\alpha]{-}\dfrac{1}{\alpha}$.
Finalement $\dfrac{x^\alpha-\alpha^x}{x^x-\alpha^\alpha}\xrightarrow[x\to\alpha]{-}\dfrac{1}{1+\ln\alpha}(\ln(\alpha)-1)=\dfrac{1-\ln\alpha}{1+\ln\alpha}$.

8. $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\lambda x}=\exp\left(\lambda x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)\right)$.
Or $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)\sim-\dfrac{1}{x+2}$. Donc $\lambda x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{-\lambda x}{x+2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\lambda$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\lambda x}=e^{-\lambda}$.

TD B7. Développements limités

1 Développements limités

Exercice B7.1 ✲

1. Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

   (a) $x \mapsto \sin x \cos x$ à l'ordre 5,

   (b) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3,

   (c) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4,

   (d) $x^2\sqrt{1+2x}$ à l'ordre 3,

   (e) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$ à l'ordre 3,

   (f) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$ à l'ordre 3,

   (g) $x \mapsto (1+2x)^x$ à l'ordre 5,

   (h) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$ à l'ordre 3,

   (i) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3,

   (j) $x \mapsto \sqrt{3+\cos x}$ à l'ordre 3.

2. Déterminer un équivalent en 0 de

   (a) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}} - e$, (b) $x \mapsto e^{x+1} - (1+x)^e - (e-1)$, (c) $x \mapsto \sqrt{3+\cos x} - 2$.

Exercice B7.2 ✲

Déterminer les développements limités en x_0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \sin x$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3,
2. $x \mapsto e^x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4.
4. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 3.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ en $x_0 = -2$ à l'ordre 3.
6. $x \mapsto \ln(\sin x)$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 2.
7. $x \mapsto \sin x \cos(3x)$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 2.
8. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ en $x_0 = 2$ à l'ordre 2.

Exercice B7.3 ✲✲

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Après avoir justifié son existence, déterminer le DL de f^{-1} à l'ordre 4 en 0.

Exercice B7.4 ✲

Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^x \ln(1+x)$. En déduire la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente à l'origine.

Exercice B7.5

Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes possèdent une asymptote en $+\infty$ et déterminer leur position relative à celle-ci au voisinage de $+\infty$.

1. $x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,
2. $x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$,
3. $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$.

Exercice B7.6

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice B7.7

Calculer un développement asymptotique de chacune des fonctions suivantes à la précision demandée et au voisinage du point indiqué.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$ en 0, à deux termes.
2. $x \mapsto x^x$ en 0 à la précision $(x \ln x)^2$.
3. $x \mapsto \sqrt{x^4+x+1} - x\sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$.
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x(e^x-1)} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0 à la précision x^2.

Exercice B7.8

Soit $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x\cos^n(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I$ tel que f_n atteigne son maximum sur I en x_n.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$.
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
4. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f_n(x_n)$.
5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.

2 Formules de Taylor

Exercice B7.9

Montrer que $\left|e - \dfrac{163}{60}\right| \leqslant \dfrac{1}{240}$.

Exercice B7.10

À l'aide de la formule de Taylor reste intégral, démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

Exercice B7.11 ✿✿

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f et préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ainsi que $f(0)$.
3. À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que
$$\forall u \in [-1,1],\ |e^{-u} - 1 + u| \leqslant \frac{3u^2}{2}.$$
4. En déduire que $\forall h \in [-1,1]$, $\forall t \in [0,1]$, $\left|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right| \leqslant h^2 \dfrac{3t^2}{2} e^{-xt}$ puis que
$$\left|f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{3h^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
5. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 -\frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

TD B8. Séries numériques

Exercice B8.1 ✪

Donner la nature de chacune des séries de termes généraux

1. pour ces premiers exemples, on cherchera aussi à calculer la somme en cas de convergence

   (a) $\dfrac{1}{3^n}$,

   (b) $\dfrac{2}{n^2-1}$,

   (c) $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$,

   (d) $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(n^{\ln(n+1)}\right)}$,

2. (e) $\dfrac{1}{n^2+1}$,

   (f) $\dfrac{2^n n!}{n^n}$,

   (g) $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$,

   (h) $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}$,

   (i) $\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$,

   (j) $(-1)^n/n^2$,

   (k) $\begin{cases} 1/n^2 \text{ si } n \text{ pair,} \\ 0 \text{ sinon ;} \end{cases}$

   (l) $\dfrac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2}$,

   (m) $\dfrac{\cos(n\pi)}{(n\pi)}$,

   (n) $\dfrac{3}{\sqrt{n}-1}$,

   (o) $n\sin(1/n)$,

   (p) $\dfrac{\sin(1/n)}{n}$,

   (q) $(-1)^n n^2$,

   (r) $\begin{cases} 1/\ln(n) \text{ si } n \text{ pair,} \\ 1/\ln(1/n) \text{ sinon ;} \end{cases}$

   (s) $\ln(n)/n$,

   (t) $\dfrac{1}{n\sin(n^2)}$;

3. ✪✪ le cas échéant, on discutera suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

   (u) $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$,

   (v) $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$,

   (w) $\left(\dfrac{\ln(n)}{n}-1\right)^n$,

   (x) $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$,

   (y) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\alpha\sin(1/n)$,

   (z) $\displaystyle\int_0^{\pi/n}\frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Exercice B8.2 ✪

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. Que dire de la nature des séries de termes généraux

1. $e^{u_n}-1$,
2. u_n^2,
3. $\ln(1+u_n)$.

Exercice B8.3 ✪

1. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge et donner un équivalent de sa somme partielle.
2. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge et donner un équivalent de son reste à l'ordre n.

Exercice B8.4 ✪✪

Déterminer, en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$, la nature et, en cas de convergence, la somme de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}\right).$$

Exercice B8.5 ✿

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge si $\ell > 1$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge si $0 \leqslant \ell < 1$.
3. Donner deux exemples de séries pour lesquelles $\ell = 1$ et qui on des natures différentes.

Exercice B8.6 ✿✿ *Un produit infini*

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+x}{k^2+y}$. Montrer que (P_n) converge vers une limite strictement positive.

Exercice B8.7 ✿✿ *Transformation d'Abel*

Soit $(a_n)_n$ une suite de termes positifs décroissante et tendant vers 0. Soit (S_n) une suite bornée.

1. Montrer que $\sum (a_n - a_{n+1}) S_n$ est convergente.
2. En déduire que $\sum a_n (S_n - S_{n-1})$ est convergente.
3. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ la convergence de $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$.

Exercice B8.8 ✿✿ *Série géométrique dérivée*

Soit $x \in [0, 1[$. Étant donné $p \in \mathbb{N}$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$.

1. Montrer que cette série converge, on note S_p sa somme.
2. Montrer que $x(S_p + S_{p+1}) = S_{p+1}$.
3. Exprimer S_p en fonction de p et x.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$.
5. Que se passe-t-il si l'on remplace l'hypothèse $x \in [0, 1[$ par $x \in]-1, 1[$?

Exercice B8.9 ✿✿✿ *(Théorème de réarrangement de Riemann)*

1. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection et $\sum u_n$ une série absolument convergente. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et que sa somme est celle de $\sum u_n$.
2. Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente (*i.e.* convergente mais non absolument convergente). Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers α.

TD B9. Intégration sur un segment

Exercice B9.1 ✲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Établir la monotonie et la convergence de la suite (I_n).
3. Exprimer $1 - I_n$ à l'aide d'une intégrale et en déduire la limite de I_n.

Exercice B9.2 ✲

Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice B9.3 ✲✲✲

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées. On notera $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{1}{2}M_2 a$.
2. En déduire que f' est aussi bornée et que, en notant $M_1 = \|f'\|_\infty$, on a $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice B9.4 ✲✲

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur l'intervalle I lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I.
Montrer que $f : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, qu'elle admet une limite finie en 0, mais qu'elle n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.

Exercice B9.5 ✲✲

Soit I un intervalle, $a, b \in I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas sur I.

1. Pour tout $x \in I$, on pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) = f(a)e^{g(x)}$.
2. Montrer que si $f(a) = f(b)$, alors le nombre $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ est un entier relatif.

Exercice B9.6 ✲

Calculer les limites ou un équivalent des quantités suivantes quand $n \to +\infty$.

1. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2}$,
2. $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$,
3. $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+2k)^3}$,
4. $d_n = \dfrac{1}{n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^n k^3$,
5. $e_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$,
6. $f_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice B9.7 ✿✿

1. Déterminer $\eta > 0$ et $\alpha \geqslant 0$ tels que $\forall x \in]-\eta, \eta[,\ x - \alpha x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice B9.8 ✿✿

1. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, soit $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x$.
   (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I_{p,0}$.
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Établir une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
   (c) En déduire une valeur de $I_{p,q}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
2. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p, contenant chacune p boules. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules rouges et $p - i$ boules blanches. On choisit aléatoirement une des urnes et on en tire $2n$ boules, successivement et avec remise. On note $A_{n,p}$ l'événement « on a tiré autant de boules rouges que de boules blanches. »
   (a) Exprimer $P(A_{n,p})$ sous forme d'une somme.
   (b) Déterminer, p étant fixé, la limite de $A_{n,p}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *Indication : on pourra avoir recours à la formule de Stirling.*
   (c) Déterminer, n étant fixé, la limite de $A_{n,p}$ lorsque p tend vers $+\infty$. *Indication : on pourra penser aux sommes de Riemann.*

TD B10. Familles sommables

Exercice B10.1 ⚙

Étudier la sommabilité des familles suivantes.

1. $\displaystyle\left(\frac{1}{x^2}\right)_{\substack{x\in\mathbb{Q}\\ x\geqslant 1}}$,
2. $\displaystyle\left(\frac{1}{(2p+1)2^q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$,
3. $\displaystyle\left(\frac{1}{(2p+1)^2 2^q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$.

Exercice B10.2 ⚙⚙

La famille $\displaystyle\left(\frac{1}{n^2-p^2}\right)_{\substack{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\neq p}}$ est-elle sommable ?

Exercice B10.3 ⚙

Calculer dans $[0,+\infty]$ la somme des familles suivantes.

1. $\displaystyle\left(\frac{1}{k!}\right)_{0\leqslant n\leqslant k}$,
2. $\displaystyle\left(\frac{2^{2k-n}}{k!}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$,
3. ⚙⚙ $\displaystyle\left(\frac{1}{p!q!(p+q+1)}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$.

Exercice B10.4 ⚙⚙

Déterminer à quelle condition sur $z\in\mathbb{C}$ les familles suivantes sont sommables et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$,
2. $\displaystyle\left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$,
3. $\displaystyle\left(\binom{p+q}{p} z^{p+q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

Exercice B10.5 ⚙⚙

Pour tout $n>2$, on note $\displaystyle\zeta(n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^n}$.

1. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.
2. On admet que $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$. Calculer
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$,
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$,
   (c) $\displaystyle\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{m^2n^2}$,
   (d) $\displaystyle\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m<n}}\frac{1}{m^2n^2}$,
   (e) $\displaystyle\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m\div n}}\frac{1}{m^2n^2}$,
   (f) ⚙⚙⚙ $\displaystyle\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m\wedge n=1}}\frac{1}{m^2n^2}$.

Exercice B10.6 ⚙

Soit $r,\theta\in\mathbb{R}$. Donner une condition suffisante pour que la famille $\left(r^{|z|}e^{iz\theta}\right)_{z\in\mathbb{Z}}$ soit sommable et, dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice B10.7 ✿✿

Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que $(x^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$, où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n.

Exercice B10.8 ✿✿

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ une série de nombres réels ou complexes que l'on suppose absolument convergente. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{D_n}{n(n+1)}$ est aussi absolument convergente et que les sommes de ces deux séries sont égales.

TD B11. Fonctions de deux variables

1 Topologie, continuité

Exercice B11.1 ✵

1. Soit $]a, b[$ et $]c, d[$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que $]a, b[\times]c, d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que $U \times V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice B11.2 ✵✵

Soit $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

1. Montrer que f admet une dérivée en $(0, 0)$ dans toutes les directions.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2 Dérivation

Exercice B11.3 ✵

Calculer les dérivées partielles de

1. $a : (x, y) \mapsto x^2 + 3x2y^3 - 2xy + 4y - 28$,
2. $b : (x, y) \mapsto \operatorname{Arctan}(1 + xy)$,
3. $c : (x, y) \mapsto \cos(3xy - y^2)$,
4. $d : (x, y) \mapsto y \sin(\ln(x) - y^2)$,
5. $e : (x, y) \mapsto x^y$,
6. $f : (x, y) \mapsto \dfrac{e^{xy^2}}{x + y}$.

Exercice B11.4 ✵

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\varphi : t \mapsto f\left(e^t, t + \dfrac{1}{t}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer l'expression de φ'.
2. Montrer que $\psi : (u, v) \mapsto f(u + v, uv)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.
3. Exprimer les dérivées partielles de $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

3 Équations aux dérivées partielles

Exercice B11.5 ✵

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda > 0,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y).$$

1. Montrer que les dérivées partielles d'une fonction homogène sont également homogènes.
2. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

Exercice B11.6 ✵✵

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si $\forall x, y, t \in \mathbb{R}^2,\ f(x + t, y + t) = f(x, y)$.

4 Extrema

Exercice B11.7 ✿✿

Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

1. $f_1 : (x,y) \mapsto (x+y)^2 + x^4 + y^4$,
2. $f_2 : (x,y) \mapsto -x^2 - xy - y^2 + 3y - 2$,
3. $f_3 : (x,y) \mapsto x^2(1+y)^3 + y^4$,
4. $f_4 : (x,y) \mapsto e^{x \sin y}$.

Troisième partie

De algebra fundamentali

TD C1. Ensembles et applications

1 Ensembles

Exercice C1.1

Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$ (rappel : $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E).

Exercice C1.2

Écrire en extension les ensembles $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Exercice C1.3 ✿

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer les assertions suivantes

1. $A \subset \overline{B} \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$,
2. $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$,
3. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$,
4. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow (B \subset A$ et $A \subset C)$.

Exercice C1.4 ✿

Notation. On note $\neg P$ la négation de l'assertion P.

Soit E un ensemble. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses pour toutes parties A, B, C de E ?

1. $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$,
2. $\neg(A \subset B) \Rightarrow (B \subset A)$,
3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
4. $(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow (A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C})$.

Exercice C1.5 ✿

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ deux recouvrements disjoints de E (I et J étant eux-même des ensembles).

Montrer que $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est également un recouvrement disjoint de E.

2 Applications

Exercice C1.6

1. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

   (a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

   (a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}$.

3. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ? Si c'est possible, donner une expression de leur bijection réciproque.

(a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-3y,x+2y) \end{array}$, (b) $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,z,x) \end{array}$, (c) $\begin{array}{rcl} \varphi:\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \end{array}$.

Exercice C1.7 ✲

L'application $\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, $z\mapsto e^z$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice C1.8

Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ telles que $g\circ f$ et $h\circ g$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice C1.9 ✲

Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$.

1. Montrer que si $g\circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g\circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice C1.10 ✲

Soit $f : E\to F$.

1. Montrer que si $A\subset E$, alors $A\subset f^{-1}(f(A))$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
2. Montrer que si $B\subset F$, alors $f(f^{-1}(B))\subset B$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte. À quelle condition sur f peut-on avoir égalité ?
3. Soient A_1, A_2 deux parties de E.
   (a) Montrer que
   $$f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2).$$
   Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
   (b) Soient A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que
   $$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2).$$
4. Soient B_1, B_2 deux parties de F.
   (a) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2).$$
   (b) Montrer que
   $$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2).$$

Exercice C1.11 ✲

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$. On définit $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \\ x & \mapsto & f([0,x]) \end{array}$. Montrer que si f est injective, alors F est injective.

Exercice C1.12 ✲✲

Étant donnée $f : E\to F$, on note

$$f_d : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad f_r : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{(-1)}(B) \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si f_d est injective.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si f_r est injective.

3 Relations binaires

Exercice C1.13

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x.

Exercice C1.14 ✹

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\sim$ par : $\forall p, q \in \mathbb{Z},\ p \sim q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ 2^n a = b$.
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence et donner la classe d'équivalence de 0, 1, -1, 28.

Exercice C1.15

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence pour cette relation.

Exercice C1.16 ✹

Soit E muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$. Étant donné un ensemble X, on note $F = \mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions de X dans E.
On définit sur F la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall f, g \in F,\ f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur F. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice C1.17

Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'**ordre strict** lorsqu'elle est transitive, antisymétrique et **irréflexive** (*i.e.* $\forall x \in E$, on n'a pas $x\mathcal{R}x$).
Soit $\leqslant$ une relation d'ordre sur E. On définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x \leqslant y \text{ et } x \neq y).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre strict sur E.
Remarque. Ceci montre qu'une relation d'ordre permet toujours de définir une relation d'ordre strict, dont on dit qu'elle lui est associée.

Exercice C1.18 ✹✹

Soit E, F deux ensembles munis chacun d'une relation d'ordre, notées respectivement $\leqslant_E$ et $\leqslant_F$. On note $<_E$ et $<_F$ les relations d'ordre strict associées (voir exercice ci-dessus). On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est

- **croissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \leqslant_E x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant_F f(x_2)$,
- **strictement croissante** lorsque $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 <_E x_2 \Rightarrow f(x_1) <_F f(x_2)$.

1. Écrire les définitions d'une fonction décroissante et strictement décroissante.
2. Soit $E = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$ muni de l'inclusion (qui, rappelons-le, est une relation d'ordre). On munit $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre usuelle et on définit l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \min(A) \end{array}.$$
Montrer que φ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ?
3. Soit E un ensemble. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$ et on définit l'application
$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}.$$
Montrer que ψ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ?

Sol C1. Ensembles et applications

Exercice C1.5

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux recouvrements disjoints de E (I et J étant eux-même des ensembles).
Montrons que $(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est également un recouvrement disjoint de E.

- Soit $x \in E$.
  Comme les (A_i) forment un recouvrement, $\exists i_0 \in I$, $x \in A_{i_0}$; et comme les (B_j) forment un recouvrement, $\exists j_0 \in I$, $x \in b_{j_0}$.
  Donc $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$.
- Soit (i,j) et (i',j') dans $I \times J$.
  $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'})$ est contenu dans $A_i \cap A_{i'}$ par exemple, donc $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = \emptyset$.

Exercice C1.14

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\sim$ par : $\forall p,q \in \mathbb{Z}$, $p \sim q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$, $2^n a = b$.

réflexivité : Soit $p \in \mathbb{Z}$. On a $2^0 p = p$ donc $p \sim p$.

symétrie : Soit $p,q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \sim q$. Alors on dispose de $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2^n p = q$. Comme $2^{-n} q = p$ avec $-n \in \mathbb{Z}$, on a $q \sim p$.

transitivité : Soit $p,q,r \in \mathbb{Z}$ tels que $p \sim q$ et $q \sim r$. On dispose alors de n et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $2^n p = q$ et $2^m q = r$. Alors $2^{m+n} p = 2^m(2^n p) = r$. Donc $p \sim r$.

Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.
La classe d'équivalence d'un entier p est $\{2^n p \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
Ainsi $\overline{0} = \{0\}$, $\overline{1} = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\overline{-1} = \{-2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\overline{28} = \{7 \times 2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

TD C2. Structures algébriques

1 Groupes

Exercice C2.1 ✿

Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un groupe $(G, \times)$. Montrer que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

Exercice C2.2 ✿

Étant donné un groupe $(G, \star)$, on définit le centre de G comme

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\, x \star y = y \star x\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe de $(G, \star)$.
2. Déterminer le centre du groupe $(G, \star)$ défini par

$$G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall (x, y), (x', y') \in G,\, (x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y).$$

Exercice C2.3 ✿✿

Soit $(G, \times)$ un groupe dont on note e l'élément neutre.

1. On suppose que G contient exactement deux éléments : e et $a \neq e$.
   (a) Montrer que $a^2 = e$.
   (b) En déduire que deux groupes à 2 éléments sont nécessairement isomorphes.
2. On suppose que G contient exactement 3 éléments.
   (a) Déterminer la table de la loi $\times$.
   (b) En déduire que deux groupes à 3 éléments sont nécessairement isomorphes.
3. Monter que les groupes $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ ne sont pas isomorphes.

Exercice C2.4 ✿

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour tout $g \in G$, on définit $\varphi_g : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & gxx^{-1} \end{array}$.

1. Montrer que φ_g est un automorphisme de G.
2. Montrer que $f : g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de groupes de $(G, \star)$ dans $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi$ est le centre de G (voir un exercice précédent).

Exercice C2.5 ✿

Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_6 & \longrightarrow & \mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3 \\ z & \longmapsto & (z^3, z^2) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice C2.6 ✿ (Théorème de Lagrange)

Soit $(G, \times)$ un groupe fini à n éléments et H un sous-groupe à m éléments de G. Le théorème de Lagrange stipule que nécessairement m divise n.
On définit sur G la relation binaire $\sim$ par

$$\forall x, y \in G,\, x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.
2. Soit $g \in G$. On note $\mathrm{cl}(g)$ sa classe d'équivalence. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{cl}(g) \\ h & \mapsto & hg \end{array}$ est bien définie et bijective.
3. En déduire le théorème de Lagrange.

Exercice C2.7 ✲✲

Soit $(G, \star)$ un groupe fini.

1. Soit $a \in G$. Montrer que $t : \begin{array}{ccc} G & \to G & \\ g & \mapsto & a \star g \end{array}$ est un automorphisme de G.
2. Soit $f : (G, \star) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ un morphisme de groupes non constant. Calculer $\displaystyle\sum_{g \in G} f(g)$.
3. Que dire si f est constant ?

Exercice C2.8 ✲✲ (sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$)

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
2. Si $\alpha > 0$, montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Si $\alpha = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice C2.9 ✲

Montrer que chacune des applications suivantes est un morphisme de groupes, puis déterminer son noyau et son image.

1. $n \mapsto (-1)^n$, définie sur $\mathbb{Z}$,
2. $z \mapsto \dfrac{z}{|z|}$, définie sur $\mathbb{C}^*$,
3. $(r, u) \mapsto ru$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$.

Exercice C2.10 ✲✲

Montrer que si deux groupes G et G' sont isomorphes, alors $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Aut}(G')$ sont isomorphes.

2 Anneaux, corps

Exercice C2.11 ✲✲

Soit E un ensemble. On rappelle la définition de la différence symétrique de deux parties de E :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe dont tout élément est son propre symétrique.
2. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta \cap)$ est un anneau commutatif.
3. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta \cap)$ n'est pas intègre si E contient au moins deux éléments.

Exercice C2.12 ✲ (Anneau des entiers de Gauß)

Soit $A = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que tout élément inversible de A est de module 1.
3. En déduire le groupe des inversibles de A.

Exercice C2.13 ✿

Soit A un anneau intègre. Étant donnés $a, b \in A$, on dit que a **divise** b (et on note $a|b$) lorsque $\exists k \in A,\ b = ak$.
Soit $a, b \in A$. Montrer que
$$a|b \text{ et } b|a \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in U(A),\ b = au.$$

Exercice C2.14 ✿

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $a, b \in A$.

1. Montrer que si ab est nilpotent, alors ba est nilpotent.
2. On suppose que a et b commutent.
   (a) Montrer que si a est nilpotent, alors ab est nilpotent.
   (b) Montrer que si a et b sont nilpotents, alors $a + b$ est nilpotent.

Exercice C2.15 ✿

On définit $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que K est un corps.

Sol C2. Structures algébriques

3 Groupes

Exercice C2.15 ⚙

On définit $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que K est un corps.

TD C3. Arithmétique des entiers

1 Divisibilité, congruences

Exercice C3.2

À l'aide de congruences, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{2n+2}$,
2. $6 \mid 5n^3 + n$,
3. $9 \mid 4^n - 3n - 1$.

Exercice C3.3

1. Faux ou faux ? Justifier. Soit $a, b, d, n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Si a et b divisent n, alors ab divise n.
   (b) Si d divise ab, alors d divise a ou d divise b.
   (c) Si d divise n^2, alors d divise n
   (d) L'intervalle $[\![0, 280]\!]$ contient 10 entiers divisibles par 28.
   (e) Si $n \equiv 1$ [25], alors n est impair.
   (f) Si $a^2 \equiv 1$ $[n]$, alors $a \equiv \pm 1$ $[n]$.
   (g) Si $4a \equiv 4b$ [6], alors $a \equiv b$ [6].
   (h) Si $a \equiv b$ $[n]$, alors $d^a \equiv d^b$ $[n]$.
2. Concevoir un exercice intitulé "Vrai ou vrai ? Justifier." dont les 8 items ressembleraient aux assertions ci-dessus, modifiées de la manière la plus infime possible.
3. Répondre aux questions de ce nouvel exercice.

Exercice C3.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note a_0 son chiffre des unités, a_1 son chiffre des dizaines, etc. Sous forme décimale : on note $n = \overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{10}$, avec $r \in \mathbb{N}$ et $a_i \in [\![0, 9]\!]$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant r$. Montrer que n est divisible

1. par 2 si et seulement si $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
2. par 5 si et seulement si $a_0 \in \{0, 5\}$;
3. par 4 si et seulement si $\overline{a_1 a_0}^{10}$ est divisible par 4,
4. par 8 si et seulement si $\overline{a_2 a_1 a_0}^{10}$ est divisible par 8,
5. par 3 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} a_i$ est divisible par 3,
6. par 9 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} a_i$ est divisible par 9,
7. par 7 si et seulement si $\overline{a_r \dots a_2 a_1}^{10} - 2a_0$ est divisible par 7,
8. par 11 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_i$ est divisible par 11.

Exercice C3.7

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice C3.11 ✲

Montrer que $7^4 \equiv 1\ [10]$. En déduire le chiffre des unités de 7^{7^7} ?

Exercice C3.13

Trouver tous les entiers x vérifiant $\begin{cases} x \equiv 2\ [10] \\ x \equiv 5\ [13] \end{cases}$.

Exercice C3.17 ✲

15 astronautes découvrent un précieux stock de nourriture sur une planète désertique. Après un partage (rigoureusement équitable), il reste 3 rations. La discussion s'anime. Bilan : 8 astronautes flottant mystérieusement dans le vide intersidéral. Les 7 rescapés reprennent le partage, mais il reste encore 2 rations. Cette fois, la querelle devient plus intense, et après quelques « accidents », il ne reste que 4 astronautes. Fort heureusement, ils peuvent enfin se partager la nourriture sans qu'il n'y ait de surplus à négocier. Combien de rations, au minimum, a chaque astronaute ?

Exercice C3.19 ✲

1. Montrer que 888888887 ne peut pas s'écrire comme somme de trois carrés d'entiers.
2. Montrer que 999999994 ne peut pas s'écrire comme somme de trois cubes d'entiers.

Exercice C3.23 ✲

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k\frac{p}{q} \right\rfloor$.

2 PGCD, PPCM

Exercice C3.29

Déterminer dans chaque cas le PGCD, le PPCM et un couple de coefficients de Bézout pour a et b.

1. $a = 270$ et $b = 105$,
2. $a = 374$ et $b = 781$,
3. $a = 840$ et $b = 532$.

Exercice C3.31 ✲

Déterminer le PGCD des nombres a et b dans chacun des cas suivants.

1. $a = 2^{445} + 7$ et $b = 15$.
2. $a = 15n^2 + 8n + 6$ et $b = 30n^2 + 21n + 13$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice C3.37 ✲

Trouver tous les couples d'entiers (a, b) tels que

1. $a \wedge b = 50$ et $a \vee b = 600$,
2. $a \wedge b = 6$ et $a + b = 48$,
3. $a \wedge b = 18$ et $ab = 6480$.

Exercice C3.41 ✲✲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. En déduire que $\binom{2n}{n}$ est divisible par $n+1$.

Exercice C3.43 ✲✲

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}$.

Exercice C3.47 ✲✲

Je multiplie mon jour de naissance par 31 et le numéro de mon mois de naissance par 12. La somme de ces deux résultats donne 830. Quelle est ma date de naissance ?

Exercice C3.53

Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que

1. $a^2 - b^2 = 7$,
2. $a \wedge b = 3$ et $a + b = 18$,
3. $15a^2 - 7b^2 = 9$ (on pourra raisonner modulo 3).

3 Nombres premiers

Exercice C3.59 ✲

Montrer que $\forall p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 3\}$, $p^2 \equiv 1$ [24].

Exercice C3.61 ✲

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $p_{n+1} < \prod_{i=1}^{n} p_i$.

Exercice C3.67

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a^2 divise b^2, alors a divise b.

Exercice C3.71 ✲✲✲

Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est divisible par tous les entiers de 2 à 31 (inclus) sauf par exactement 2 d'entre eux qui sont consécutifs. Quels sont ces deux entiers consécutifs ?

Exercice C3.73 ✲✲

On note $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble des diviseurs d'un entier n. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(ab) \\ (k, \ell) & \longmapsto & k\ell \end{array}$$

est bijective.

Exercice C3.79 ✲✲

Montrer qu'il existe un multiple de 2026, constitué uniquement de chiffres 2.

Exercice C3.83 ✿✿ (Mersenne et Fermat)

Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. (a) Montrer que si $a^n + 1$ est premier, alors a est pair et n est une puissance de 2.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$, appelé n-ième nombre de Fermat. Montrer que $F_{n+1} = 2 + \prod_{i=0}^{n} F_i$.
   (c) En déduire que pour tous entiers naturels $m \neq n$, $F_m \wedge F_n = 1$.

TD C4. Polynômes

1 Anneau des polynômes

Exercice C4.1 ✲

1. Déterminer les coefficients du polynôme $(1 + X + X^2 + \ldots + X^n)^2$.
2. En déduire les coefficients du polynôme $(1 - X + X^2 + \ldots + (-1)^n X^n)^2$.

Exercice C4.2 ✲

Calculer $P = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \ldots (1 + X^{2^n})$ *(indication : on pourra calculer $(1 - X)P$).*

Exercice C4.3 ✲

1. Soit $(T_n)_n$ la suite de polynômes définie par $\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = 2X \\ \forall n \geqslant 2,\ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \end{cases}$. Déterminer le degré de T_n pour tout n.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit Q_n un polynôme non nul vérifiant $Q_n'' - 3XQ_n' + 3nQ_n = 0$. Montrer que $\deg(Q_n) = n$.

Exercice C4.4 ✲

Trouver tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

1. $Q^2(X) = XP^2(X)$,
2. $P \circ P = P$,
3. $P(X^2) = P(X)$,
4. $P(X + 1) = XP(X)$,
5. $P'^2 = 9P$,
6. $P - XP' = X$.

Exercice C4.5 ✲

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 28. Que vaut $P^{(28)}(28)$?

Exercice C4.6 ✲

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X) X^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0.

Exercice C4.7 ✲✲

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(X + 1) - 2P(X) + P(X - 1) = 0.$$

(indication : on pourra utiliser des formules de Taylor, ou bien s'intéresser à la transformation $D(P) = P(X + 1) - P(X)$)

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice C4.8

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^5 + X^2 + 1$ et $B = X^3 - 3X^2 + 8X - 21$,
2. $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $B = X^2 - 5X + 3$,
3. $A = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ et $B = X^2 - X - 7$.

Exercice C4.9 ✿

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ distincts.

1. Calculer en fonction de $P(a)$ et $P(b)$ le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Calculer en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$ le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.

Exercice C4.10 ✿

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = (X + 1)^n - X^n - 1$ et $B = (X - 1)(X - 2)$.
2. $A = (X + 1)^n - X^n - 1$ et $B = (X - 1)^2$.
3. $A = X^{2n} + 2X^n - 2$ et $B = (X - 2)^2$.
4. $A = X^n$ et $B = X^2 - X - 2$. En déduire les puissances de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (indication : on vérifiera que $M^2 = M + 2I_3$).

Exercice C4.11 ✿✿

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos(t) + \sin(t)X)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice C4.12 ✿✿

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que dans la division euclidienne de P par $X - 1$, le reste est 3 ; par $X - 2$, le reste est 7 ; et par $X - 3$ le reste est 13. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.
2. On suppose que dans la division euclidienne de P par $X^2 + 4$, le reste est $X - 9$; et par $X - 3$, le reste est 7. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X^2 + 4)(X - 3)$.

Exercice C4.13 ✿

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le PGCD de

1. $X^4 - X^2 + 2X - 2$ et $X^3 + X - 2$,
2. $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2x - 1$ et $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$,
3. $X^n - 1$ et $(X - 1)^n$,
4. $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

3 Racines et factorisation

Exercice C4.14

Quel est l'ordre de la racine 1 dans le polynôme $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$?

Exercice C4.15

Montrer que le polynôme $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple.

Exercice C4.16

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, l'expression de $P(X)$ comme combinaison linéaire des polynômes $\{1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\}$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice C4.17

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé.

Exercice C4.18

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers.

1. Montrer que si P admet une racine rationnelle $\dfrac{r}{q}$ avec $r \wedge q = 1$, alors r divise a_0 et q divise a_n.
2. Application : montrer que toutes les racines réelles de $4X^3 + 4X^2 + 5X - 4$ sont rationnelles.
3. Application encore plus cool : soit $k, d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si d n'est pas une puissance k-ième d'un entier, alors $\sqrt[k]{d}$ est irrationnel.

Exercice C4.19

Soit $n \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ et $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} L_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k L_k$.

Exercice C4.20

Soit $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.

1. Montrer que 3 est racine double de P.
2. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice C4.21

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^2$.

Exercice C4.22

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 2$ et $P'(0) = 0$.

Exercice C4.23 ✿✿

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $P = X^3 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Soit x, y, z les trois racines complexes de P, comptées avec multiplicité.

1. Exprimer $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de a et b.
2. Si x, y et z sont non nulles, exprimer $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ en fonction de a et b.

Exercice C4.24 ✿✿

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xyz = -2 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$.

Exercice C4.25 ✿

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $Q = X^2 - 1$.
2. Soit $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que Q divise $X^{4m+2} - 2X^{2n+1} + 2X^{2p+1} - X^{2q}$.

Exercice C4.26 ✿

Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + X^2 + 1$,
2. $X^3 + 1$,
3. $X^6 + 1$,
4. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$,
5. $X^3 + X^2 + X + 1$.
6. $X^8 + X^4 + 1$,

Exercice C4.27 ✿✿✿

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2.$$

Sol C4. Polynômes

Solution C4.28

1. Produit de Cauchy : $P = (1 + X + X^2 + \ldots + X^n)^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $c_k = \begin{cases} k \text{ si } k \leqslant n \\ n-k \text{ sinon} \end{cases}$.
2. $Q = (1 - X + X^2 + \ldots + (-1)^n X^n)^2 = P(-X) = \sum_{k=0}^{2n} d_k X^k$ avec $d_k = (-1)^k c_k$.

Exercice C4.30

1. Soit $(T_n)_n$ la suite de polynômes définie par $\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = 2X \\ \forall n \geqslant 2,\, T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \end{cases}$.
   On montre par récurrence (double) que $\deg(T_n) = n$ pour tout n.
2. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
   On écrit $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots$ avec $a_n \neq 0$ (*i.e.* P de degré n).
   Alors $P(X+1) = a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \ldots$.
   Puis avec le binôme de Newton : $P(X+1) = a_n(X^n + nX^{n-1} + \ldots) + a_{n-1}(X^{n-1} + \ldots) + \ldots$.
   Donc $P(X+1) - P(X) = na_n X^{n-1} + \ldots$.
   Le coefficient dominant est non nul si $n > 0$, donc $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ (si P n'est pas constant).
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit Q_n un polynôme non nul vérifiant $Q_n'' - 3XQ_n' + 3nQ_n = 0$. Si $\deg(Q_n) = d > 0$ et son coefficient dominant est a_d, alors on a : $Q_n = a_d X^d + \ldots$, $Q_n' = da_d X^{d-1} + \ldots$ et $\deg(Q_n'') < d$. Donc le coefficient dominant de $Q_n'' - 3XQ_n' + 3nQ_n$ est $3(n-d)a_d$, nul par hypothèse. Donc $\deg(Q_n) = n$. Le cas de Q_n constant est exclu car alors il serait nul, sauf si $n = 0$. Et dans ce cas, $\deg(Q_n) = n$ est bien vérifié également.

Solution C4.10

3. Il existe un couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$, *i.e.* $\deg R \leqslant 1$. Posons alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$.
   On a $A(X) = (X-2)^2 Q(X) + aX + b$ et, en dérivant, $A'(X) = (X-2)\big((X-2)Q'(X) + 2Q(X)\big) + a$.
   Les évaluations en 2 de ces égalités donnent $A'(2) = a$, soit $a = 2n \times 2^{2n-1} + 2n \times 2^{n-1} = n(2^{2n} + 2^n)$; puis $A(2) = 2a + b$, soit $2^{2n} + 2^{n+1} - 2 = 2a + b$, *i.e.* $b = 2^{2n}(1-2n) + 2^{n+1}(1-n) - 2$.

Solution C4.13

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le PGCD de

1. Après algorithme d'Euclide : $X^4 - X^2 + 2X - 2 \wedge X^3 + X - 2 = X - 1$.
2. Après algorithme d'Euclide : $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2x - 1 \wedge X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1 = X^2 - X + 1$.
3. $X^n - 1 \wedge (X-1)^n = X - 1$ car 1 est racine simple de $X^n - 1$ et la seule racine dans $\mathbb{C}$ de $(X-1)^n$.
4. On détermine les racines complexes communes de $X^n - 1$ et $X^m - 1$. Ce sont les $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{n \wedge m}$ (déjà évoqué en arithmétique). Ainsi $X^n - 1 \wedge X^m - 1 = X^{n \wedge m} - 1$.

Solution C4.20

Soit $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.

1. On vérifie $P(3) = P'(3) = 0$ mais $P''(3) \neq 0$.
2. On calcule un premier quotient $P = (X-3)^2(X^2+X+1)$ et X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. On a donc la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$. Puis dans $\mathbb{C}[X]$: $P = (X-3)^2(X-j)(X+j)$.

Solution C4.25

1. $Q = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
2. Soit $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Vérifier que 1 et -1 sont racines de $X^{4m+2} - 2X^{2n+1} + 2X^{2p+1} - X^{2q}$.

Solution C4.26

1. $X^4 + X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$,
   $X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{i\frac{2\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{2\pi}{3}})$.
   Autre méthode : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2)^2 + X^2 + 1 = (X^2 - e^{i\frac{2\pi}{3}})(X^2 - e^{-i\frac{2\pi}{3}})$ puis calcul de racines carrées.
2. $X^6 + 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{5}\left(X - e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)}\right) = (X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$.
3. $(X^2-X+1)^2+1 = (X^2-X+1+i)(X^2-X+1-i)$ puis calcul des racines de chaque trinôme (on fait le premier puis celles du deuxième sont leurs conjugués).
4. $A = (X^2-X+1)^2+1 = (X^2-X+1-i)(X^2-X+1-i)$. Puis on calcule les racines de ces trinômes : celles de $X^2-X+1-i$ sont $1+i$ et $-i$. Celles de $X^2-X+1-i$ sont donc nécessairement leurs conjuguées : $1-i$ et i.
   Ainsi $A = (X-i)(X+i)(X-1+i)(X-1-i)$. Et sur $\mathbb{R}$: $A = (x^2+1)(x^2-2x+2)$.
5. $(X-1)(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1) = X^7-1$ donc (par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de X^7-1 par $X-1$) : $X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{6}\left(X - e^{ik\frac{2\pi}{7}}\right)$.
   Donc $X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{3}\left(X^2 - 2\cos\left(k\frac{2\pi}{7}\right)+1\right)$.
6. On utilise X^2+X+1, composé avec X^4 : $X^8+X^4+1 = (X^4-j)(X^4+j)$. Les racines quatrièmes de j sont $\{e^{i\left(\frac{2\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}\}$. Les racines de X^4+j sont les conjuguées de celles-ci. Cela donne les 8 racines dans $\mathbb{C}$ puis on regroupe les conjugués pour obtenir des trinômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.
   Ou encore : $X^8+X^4+1 = X^8+2X^4+1-X^4 = (X^4+1)^2-(X^2)^2 = (X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$ puis on utilise les factorisations de X^2+X+2 et X^2-X+1, composées avec X^2.
   Dans $\mathbb{R}[X]$ finalement : $X^8+X^4+1 = (X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.
   On vérifie ce qu'on a obtenu sur $\mathbb{C}$ en calculant les racines de tout ce petit monde : $\pm e^{\pm\frac{\pi}{6}}, \pm e^{\pm\frac{7\pi}{6}}$.

TD C5. Fractions rationnelles

Exercice C5.1 ✻

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

   (a) $\dfrac{1}{X^2+28}$,

   (b) $\dfrac{X^2+14}{X^2+42}$,

   (c) $\dfrac{X^4+1}{(X^2+1)(X+1)^2S}$,

   (d) $\dfrac{X^2+3X+1}{(X-2)(X-1)^2}$,

   (e) $\dfrac{3}{X^3+1}$,

   (f) $\dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+4)}$.

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

   (a) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$,

   (b) $\dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2}$,

   (c) $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2-j^2)^2}$.

Exercice C5.2 ✻

Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ et calculer sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice C5.3 ✻

Calculer les limites et intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)}$,
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2(t^2-2t+2)}$.

Exercice C5.4 ✻

Calculer les dérivées successives de

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$,
2. $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$.

Exercice C5.5 ✻

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $F(X) = \dfrac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$.
2. En déduire $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+1)^3U(X) + (X-1)^3V(X) = 1$.

Exercice C5.6 ✻✻

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $\dfrac{X^{11}}{(X^2+X+1)^4}$.

Exercice C5.7 ✻✻

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{1}{X^{2n}-1}$.

Exercice C5.8 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.
3. Comment peut-on obtenir ce résultat d'une autre manière ?

Exercice C5.9 ✲✲

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}^3$ et $F = \dfrac{aX^2 + bX + c}{(X-1)^2(X-2)^2}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que F admette une primitive rationnelle.

Exercice C5.10 ✲✲

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^m}{(X-1)^n}$.

Exercice C5.11 ✲✲✲ *(théorème de Gauß-Lucas)*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $z_1, \ldots, z_r$ ses racines distinctes. Montrer que pour toute racine z de P', il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ et $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i$.

TD C6. Groupe symétrique

Exercice C6.1 ✲

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Combien y a-t-il de permutations circulaires dans S_n ?

Exercice C6.2 ✲

1. Soit $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire $\rho\sigma$ et ρ^{-1} comme produits de cycles à supports disjoints.
2. Écrire la permutation $(12)(2465)(137)(254)(3561)(25)(146)$ comme produit de cycles à supports disjoints.
3. Calculer la signature de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $(134)(2431)(23)$.

Exercice C6.3 ✲

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 1 & 2 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints, en produit de transpositions, calculer σ^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et donner l'ordre de σ.

Exercice C6.4 ✲

Soit $\gamma \in S_n$ un cycle et $\sigma \in S_n$. Déterminer $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$.

Exercice C6.5 ✲✲

Montrer que S_n est engendré par

1. les transpositions de la forme $\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$ pour $i \in [\![2, n]\!]$,
2. Les transpositions de la forme $\begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$,
3. le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ et la transposition $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice C6.6 ✲✲✲

Quel est le nombre minimal de transpositions engendrant S_n ?

Exercice C6.7 ✲✲

Soit $n \geqslant 2$. Quels cycles sont éléments du groupe alterné A_n ? Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.

Exercice C6.8 ✲✲

Soit $(G, \times)$ un groupe. Pour tout $g \in G$, on définit $\varphi_G : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ h & \mapsto & gh \end{array}$.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, $\varphi_g \in S_G$.
2. Montrer que $g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de groupes injectif.
3. Montrer le théorème de Cayley : si G est fini de cardinal n, alors il est isomorphe à un sous groupe de S_n.

Quatrième partie

De algebra lineari

TD D1. Systèmes linéaires

Exercice D1.1

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} (2-i)x+(3+i)y=1+2i \\ (3+2i)x+(1+5i)y=-2+3i \end{cases}$,
3. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x+2y+z=1 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$,
4. $\begin{cases} 2x-y+2z=2 \\ x+y+z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$,
5. $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x-3y+2z=2 \\ -x+y+4z=4 \end{cases}$,
6. $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$,
7. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-3y+2z=4 \end{cases}$,
8. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$.

Exercice D1.2

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+5y-3z=1 \\ 3x+6y-z=1 \\ 4x+7y+z=1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x+3y+2z+t=-2 \\ 2x+7y+3z=-5 \\ 3x+8y+7z+11t=13 \\ -2x-8y-2z+6t=18 \end{cases}$,
3. $\begin{cases} x+y-z-s+t=0 \\ 2x+y-4z+4t=0 \\ x+2y-3z+s-t=0 \end{cases}$.

Exercice D1.3

Résoudre les systèmes suivants, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x+y=a \\ -x+ay=1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \end{cases}$,
3. $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-4z=2 \\ 2x+3y-5z=a \end{cases}$,
4. $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+3y-2z=2 \\ 7x-4y-a^2z=a-4 \end{cases}$,
5. $\begin{cases} x+ay+2z=a \\ -2x+y+(a-2)z=1 \\ ax+y+2z=2a-1 \end{cases}$,
6. $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=1 \\ x+y+z=a \end{cases}$.

Exercice D1.4

1. Résoudre, en fonction de $a \in \mathbb{C}$, le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & 0 \\ \overline{a}x & + & y & + & az & = & 0 \\ \overline{a}^2x & + & \overline{a}y & + & z & = & 0 \end{array} \right. .$$

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. En exploitant la relation $1 + j + j^2 = 0$, résoudre

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & jy & + & j^2 z & = & b \\ x & + & j^2 y & + & jz & = & c \end{array}\right. .$$

Exercice D1.5 ✿✿

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Lorsque a, b, c, d sont deux à deux distincts, résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2 x & + & b^2 y & + & c^2 z & = & d^2 \end{array}\right. .$$

2. Que dire de ce système dans les autres cas ?

Exercice D1.6

Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D1.7 ✿

Déterminer en fonction des paramètres le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice D1.8 ✿✿

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b_1 \\ x_2 + x_3 = 2b_2 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2b_{n-1} \\ x_1 + x_n = 2b_n \end{cases} .$$

TD D2. Calcul matriciel

1 Opérations matricielles

Exercice D2.1

Soit les matrices
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA.
2. Calculer $(AB)^\intercal$, $A^\intercal$, $B^\intercal$ et $B^\intercal A^\intercal$.
3. Calculer $\operatorname{Tr} A$, $\operatorname{Tr} B$, $\operatorname{Tr}(AB)$ et $\operatorname{Tr}(BA)$.
4. Développer $(A+B)^2$.

Exercice D2.2

Calculer lorsque c'est possible les produits AB et BA.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.3

Calculer tous les produits de deux matrices possibles, où les deux matrices sont à choisir parmi :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = 3C^\intercal,$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice D2.4

Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ sihx & \operatorname{ch} x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ est stable par produit.

Exercice D2.5

Calculer les puissances des matrices suivantes

1. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.6

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une expression de A^2 comme combinaison linéaire de A et I_3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Déterminer une expression des suites (a_n) et (b_n) puis de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice D2.7

Soit A et B deux matrices carrées telles que $AB - BA = B$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Tr}(B^k) = 0$.

Exercice D2.8

Soit $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\operatorname{Tr}\left((AB - BA)^\intercal (AB - BA)\right) = 2\left(\operatorname{Tr}(A^2B^2) - \operatorname{Tr}\left((AB)^2\right)\right)$.
2. En déduire que $\operatorname{Tr}\left((AB)^2\right) \leqslant \operatorname{Tr}(A^2B^2)$.

Exercice D2.9

Trouver si c'est possible deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

2 Matrices inversibles

Exercice D2.10

Soient X et Y deux matrices colonnes.

1. Montrer que $XY^\intercal$ est de rang 1.
2. Montrer que toute matrice carrée A de rang 1 peut s'écrire de la forme ci-dessus.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice D2.11

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors AB et $A + B$ sont également nilpotentes.
2. Montrer que si M est nilpotente, alors $I_n - M$ est inversible et donner son inverse.

Exercice D2.12

Calculer l'inverse des matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.13

Déterminer le rang des matrices suivantes. Dans l'éventualité où il serait maximal pour une matrice carrée, calculer l'inverse de la matrice.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.14 ✵

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice D2.15 ✵✵

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. Exprimer A en fonction de P et Q puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k en fonction de P et Q.
3. Cette relation est-elle vraie pour $k \in \mathbb{Z}$?

Exercice D2.16 ✵✵

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer trois valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ telles que $\forall i \in \{1,2,3\}$, le système $AX = \lambda_i X$ a une solution $X_i \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.
2. Soit P la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui a pour colonnes X_1, X_2 et X_3.
3. Déterminer sans calculs une matrice diagonale D telle que $AP = PD$.
4. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Calculer de la même manière les puissances des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.17 ✲✲

Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ [N]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ [A]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \geqslant i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Exprimer A à l'aide des puissances de N puis montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice D2.18 ✲

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on note $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est stable par produit.
2. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, calculer $M(xz, -yz)M(x,y)$.
3. Pour quels couples (x,y) la matrice $M(x,y)$ est-elle inversible ? Donner son inverse dans ce cas.

Exercice D2.19 ✲✲

Soit $E = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall i,j \in [\![1,n]\!], [M]_{i,j} = \begin{cases} a \text{ si } i = j \\ b \text{ sinon} \end{cases} \right\}$.

1. Montrer que E est stable par produit.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b une matrice $M \in E$ est-elle inversible ? Montrer que dans ce cas, $M^{-1} \in E$.

Exercice D2.20 ✲✲✲

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante et multiplicative, *i.e.* telle que

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

TD D3. Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

Exercice D3.1

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sev d'un ev de référence. Le cas échéant et si cela est possible, en donner une famille génératrice.

1. Des polynômes.
   (a) $F_1 = \mathbb{K}_2[X]$,
   (b) $F_2 = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P(1) = 0\}$,
   (c) $F_3 = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
2. Des fonctions.
   (a) $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' - 2f' + 2f = 0\}$,
   (b) $F_8 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid ff' = 0\}$,
   (c) $F_9 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f + f'^2 = 0\}$.
3. Des suites.
   (a) l'ensemble F_4 des suites géométriques de raison 2,
   (b) l'ensemble F_5 des suites arithmétiques.
   (c) l'ensemble F_6 des suites géométriques.
4. Des matrices.
   (a) l'ensemble F_{10} des matrices 3×3 symétriques,
   (b) l'ensemble F_{11} des matrices 3×3 inversibles,
   (c) l'ensemble F_{12} des matrices 3×3 de trace nulle.

Exercice D3.2

Soit E l'ensemble des fonctions réelles. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des sev. de E.

1. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$,
2. l'ensemble des fonctions monotones,
3. l'ensemble des fonctions telles que $f(28) = 0$,
4. l'ensemble des fonctions telles que $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$,
5. l'ensemble des fonctions admettant une période rationnelle
6. l'ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$,
7. étant donné $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions ayant pour limite α en $+\infty$,
8. l'ensemble des fonctions admettant une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.

Exercice D3.3

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sev d'un ev de référence. Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

1. $F_1 = \{(4t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$.
3. $F_3 = \{(4t + 1, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + z = 0\}$.
5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z \geqslant 0\}$.
6. $F_6 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + z - t = 0\}$.
7. $F_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$.
8. $F_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.
9. $F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } -x - y + z = 0\}$.
10. $F_{10} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + z - t = 0 \text{ et } y + z = 1\}$.

Exercice D3.4 ✲

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ et $G = \{(s - t, s + t, t),\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice D3.5 ✲

Chacune des familles suivantes est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathscr{F}_1 = ((1,2,1),(3,0,1))$,
2. $\mathscr{F}_2 = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$,
3. $\mathscr{F}_3 = ((1,1,2),(1,-1,3),(1,3,1))$,
4. $\mathscr{F}_4 = ((1,1,2),(1,0,3),(2,1,2),(1,0,2))$.

Exercice D3.6 ✲

Dans $\mathbb{C}^3$, soit $u_1 = (1-i, i, 1+i)$, $u_2 = (-1,1,3)$ et $u_3 = (1-i, i, i)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de $\mathbb{C}^3$ et donner la décomposition de $u = (1+i, 2, i)$ comme combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3).

Exercice D3.7 ✲

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1, \dots, x_p \in E$ et $x_{p+1} \in \mathrm{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+1} = \mathrm{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}.$$

Exercice D3.8 ✲

1. Faux ou faux ? Justifier. Soit E un espace vectoriel et X et Y deux parties de E.
   (a) $X \subset Y \Leftrightarrow \mathrm{Vect}\, X \subset \mathrm{Vect}\, Y$,
   (b) $\mathrm{Vect}(X \cap Y) = \mathrm{Vect}\, X \cap \mathrm{Vect}\, Y$,
   (c) $\mathrm{Vect}(X \cup Y) = \mathrm{Vect}\, X \cup \mathrm{Vect}\, Y$,
   (d) $\mathrm{Vect}\, X = X \Leftrightarrow X = E$.
2. Concevoir un exercice intitulé "Vrai ou vrai ? Justifier." dont les 4 items ressembleraient aux assertions ci-dessus, modifiées de la manière la plus infime possible.
3. Répondre aux questions de ce nouvel exercice.

Exercice D3.9 ✲

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \mathrm{Vect}\,((1,1,0),(1,0,1))$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1,2,-1),(3,1,2))$. Montrer que $F = G$.

Exercice D3.10 ✲✲

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\,\big((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\big)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos(kx))_{0 \leqslant k \leqslant n} = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Exercice D3.11

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

Exercice D3.12 ✲

Soit $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } y-z+t=0\right\}$. Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice D3.13

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $a = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. Dans chacun des cas suivants : a-t-on $\mathbb{R}^4 = F + G$? F et G sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^4$? Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

1. $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(c)$,
2. $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(d, e)$,
3. $F = \mathrm{Vect}(a, c, d)$ et $G = \mathrm{Vect}(b, e)$,
4. $F = \mathrm{Vect}(a, d)$ et $G = \mathrm{Vect}(c, e)$.

Exercice D3.14 ✲

On appelle E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites de limite nulle et G l'ensemble des suites constantes.

1. Montrer que E, F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice D3.15 ✲

On appelle E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F l'ensemble des fonctions affines et G l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que E, F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice D3.16 ✲✲

Montrer que $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2 P(X)\right\}$ et $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$ sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice D3.17 ✲✲

Déterminer un supplémentaire des sev suivants.

1. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$.
2. $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(-X) = P(X)\}$.

2 Applications linéaires

Exercice D3.18

Les applications suivantes sont-elles des morphismes d'espaces vectoriels ? Le cas échéant, déterminer leur noyau et leur image.

1. $\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, x + z) \end{array}$
3. $\begin{array}{rcl} f_3 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & xyz \end{array}$
4. $\begin{array}{rcl} f_4 : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f + f' \end{array}$
5. $\begin{array}{rcl} f_5 : \mathbb{R}^\mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$
6. $\begin{array}{rcl} f_6 : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (X^2 + 1)P \end{array}$

7. $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$

8. $f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$

9. $f_9 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + M^\intercal \end{array}$

Exercice D3.19 ✿✿

Soit

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP' - 2P \end{array}.$$

Montrer que φ est un endomorphisme, déterminer son image et son noyau.

Exercice D3.20 ✿

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E, F et G des ev.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$.
4. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

Exercice D3.21 ✿

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $u^2 = u \circ u$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.
4. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E$.

Exercice D3.22 ✿

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que f et g commutent. Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g$ sont stables par f.

Exercice D3.23 ✿✿

Soit $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1. Montrer que f, g et h ont même noyau N et même image I.
2. Montrer que $f^5 = f$. En déduire que $E = N \oplus I$.

Exercice D3.24

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\exists \lambda \in E$, $u(x) = \lambda x$.
Montrer que $\exists \lambda \in E$, $\forall x \in E$, $u(x) = \lambda x$.

Exercice D3.25 ✿

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Id} - p$ en est un aussi.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - p) = \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - p)$.

Exercice D3.26 ✱

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$,

(ii) p et q sont des projecteurs et $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

Exercice D3.27 ✱✱✱

Soit p et q deux projecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Dans ce cas, montrer que $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Sol D3. Espaces vectoriels

Solution D3.28

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sev d'un ev de référence. Le cas échéant et si cela est possible, en donner une famille génératrice.

4. Des matrices.
   (a) $F_{10} = \mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32})$.
   (b) La matrice nulle n'est pas dans F_{11}.
   (c) F_{12} est le noyau de l'application trace sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ qui est une application linéaire.
   Et $F_{12} = \mathrm{Vect}\,(E_{12}, E_{13}, E_{23}, E_{21}, E_{31}, E_{32}, E_{11} - E_{22}, E_{11} - E_{33})$ par exemple.

Solution D3.30

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sev d'un ev de référence. Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

4. $F_4 = \{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
5. F_5 n'est pas un sev : $(1, 0, 0) \in F_5$ mais $-(1, 0, 0) \notin F_5$.
6. $F_6 = \{(x, y, z, 2x - y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1))$.

Solution D3.8

1. Faux ou faux ? Justifier. Soit E un espace vectoriel et X et Y deux parties de E.
   (b) Soit $u \in E$ un vecteur non nul et posons $X = \{u\}$ et $Y = \{-u\}$. Alors $\mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}(Y) = \mathrm{Vect}(u)$ mais $X \cap Y = \emptyset$ et $\mathrm{Vect}(X \cap Y) = \{0_E\}$.
   (c) Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathbb{R}^2$. Posons $X = \{u\}$ et $Y = \{-u\}$.
   Alors $\mathrm{Vect}(X \cup Y) = \mathbb{R}^2$ mais $\mathrm{Vect}\,X \cup \mathrm{Vect}\,Y$ est simplement la réunion de deux droites (qui n'est même pas un sev de $\mathbb{R}^2$. Par exemple $u + v \notin \mathrm{Vect}\,X \cup \mathrm{Vect}\,Y$.
   (d) Dès que X est un sev de E, on a $\mathrm{Vect}\,X = X$. Pour un contre-exemple, choisir n'importe quel sev strict de E (possible sauf si $E = \{0_E\}$).

Solution D3.11

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $F \cup G = F + G$.
Par l'absurde : supposons $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
Alors on dispose de $x_1 \in F \setminus G$ et $x_2 \in G \setminus F$.
$x_1 + x_2 \in F + G$ par définition, et donc $x_1 + x_2 \in F \cup G$ d'après l'hypothèse.

- si $x_1 + x_2 \in F$, alors $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 \in F$ par stabilité, ce qui est faux.
- si $x_1 + x_2 \in G$, alors $x_1 = (x_1 + x_2) - x_2 \in G$ par stabilité, ce qui est faux.

D'où la contradiction.

$\boxed{\Leftarrow}$ **1^er^ cas :** $F \subset G$. Dans ce cas $F \cup G = G$ et $F + G = G$, d'où l'égalité.
2^e^ cas : $G \subset F$. Dans ce cas $F \cup G = F$ et $F + G = F$, d'où l'égalité.

Solution D3.18

Les applications suivantes sont-elles des morphismes d'espaces vectoriels ? Le cas échéant, déterminer leur noyau et leur image.

5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$.

   $\operatorname{Im} f_5 = \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Ker} f_5 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = 0\}$.

6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (X^2+1)P \end{array}$.

   $\operatorname{Im} f_6 = \{(X^2+1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$ et $\operatorname{Ker} f_6 = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

7. $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$.

   Linéarité Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{array}{rcl} f_7(P+Q) & = & (P+Q)(0) \\ & = & P(0) + Q(0) \\ & = & f_7(P) + f_7(Q). \end{array}$$

   $$\begin{array}{rcl} f_7(\lambda \cdot P) & = & (\lambda \cdot P)(0) \\ & = & \lambda \cdot P(0) \\ & = & \lambda \cdot f_7(P). \end{array}$$

   Noyau Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\begin{array}{rcl} P \in \operatorname{Ker} f_7 & \Leftrightarrow & f_7(P) = 0_{\mathbb{R}} \\ & \Leftrightarrow & P(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (X-1) \div P \\ & \Leftrightarrow & P \in \{(X-1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}. \end{array}$

   Donc $\operatorname{Ker} f_7 = \{(X-1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

   Image Montrons que $\operatorname{Im} f_7 = \mathbb{R}$.

   Soit $a \in \mathbb{R}$ et P le polynôme constant égal à a.

   $P \in \mathbb{R}[X]$ et $f_7(P) = a$. Donc $a \in \operatorname{Im} f_7$.

   Réciproquement, on a bien $\operatorname{Im} f_7 \subset \mathbb{R}$.

   Donc $\operatorname{Im} f_7 = \mathbb{R}$.

8. $f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$.

   Linéarité Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{array}{rcl} f_8(P+Q) & = & ((P+Q)(0), (P+Q)(1), (P+Q)(2)) \\ & = & (P(0)+Q(0), P(1)+Q(1), P(2)+Q(2)) \\ & = & (P(0), P(1), P(2)) + (Q(0), Q(1), Q(2)) \\ & = & f_8(P) + f_8(Q). \end{array}$$

   $$\begin{array}{rcl} f_8(\lambda \cdot P) & = & ((\lambda \cdot P)(0), (\lambda \cdot P)(1), (\lambda \cdot P)(2)) \\ & = & (\lambda P(0), \lambda P(1), \lambda P(2)) \\ & = & \lambda \cdot (P(0), P(1), P(2)) \\ & = & \lambda \cdot f_8(P). \end{array}$$

Noyau Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f_8 &\Leftrightarrow f_8(P) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow (P(0), P(1), P(2)) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f_8 = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.

Image Montrons que $\operatorname{Im} f_8 = \mathbb{R}^3$.

M1 Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Im} f_8 &\Leftrightarrow \exists P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X],\ f_8(P) = (x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_2[X],\ (P(0), P(1), P(2)) = (x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_2[X],\ \begin{cases} c = x \\ a + b + c = y \\ 4a + 2b + c = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_2[X],\ \begin{cases} a + b + c = y \\ -2b - 3c = z - 4y \\ c = x \end{cases}. \end{aligned}$$

Ce système est compatible pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{Im} f_8 = \mathbb{R}^3$.

M2 (voir après le chapitre sur la dimension) $\dim(\operatorname{Ker} f_8) = 0$. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(f_8) = 3$. Donc $\operatorname{Im}(f_8)$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, donc $\operatorname{Im}(f_8) = \mathbb{R}^3$

Solution D3.21

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $u^2 = u \circ u$

1. Soit $x \in E$. $x \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow u(x) = 0_E \Rightarrow u(u(x)) = 0_E \Rightarrow u^2(x) = 0_E \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u^2$.
2. Soit $y \in E$. $y \in \operatorname{Im} u^2 \Rightarrow \exists x \in E,\ y = u^2(x)$. Posons $a = u(x)$. Alors $y = u(a)$. Donc $y \in \operatorname{Im} u$.
3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

   $\boxed{\supset}$ $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$ car $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$ est un sev de E.

   $\boxed{\subset}$ Soit $y \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$.
   $y \in \operatorname{Im} u$ donc $\exists x \in E,\ y = u(x)$.
   $y \in \operatorname{Ker} u$ donc $u(y) = 0_E$, donc $u(u(x)) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker} u^2$.
   D'après l'hypothèse $x \in \operatorname{Ker} u$, donc $u(x) = 0_E$, donc $y = 0_E$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$.

   $\boxed{\subset}$ $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ est toujours vrai (question 1).

   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$.
   Alors $u(u(x)) = 0_E$. Donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u$ mais aussi $u(x) \in \operatorname{Im} u$.
   D'après l'hypothèse, $u(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker} u$.
4. $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u$. Montrons que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.

   $\boxed{\supset}$ $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$ est toujours vrai (question 2).

   $\boxed{\subset}$ Soit $y \in \operatorname{Im} u$. $\exists x \in E,\ y = u(x)$
   Hypothèse : $\exists (x_1, x_2) \in \operatorname{Im} u \times \operatorname{Ker} u,\ x = x_1 + x_2$.
   Comme $x_1 \in \operatorname{Im} u$, $\exists a \in E,\ x_1 = u(a)$.
   Alors $y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(u(a)) + 0_E = u^2(a) \in \operatorname{Im} u^2$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.

$\boxed{\supset}$ $\operatorname{Im} + \operatorname{Ker} u \subset E$ car c'est un sev de E.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in E$. Alors $u(x) \in \operatorname{Im} u$.
Comme $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$, $u(x) \in \operatorname{Im} u^2$, donc $\exists a \in E$, $u(x) = u^2(a)$.
$u(x) = u(u(a))$ donc $u(x - u(a)) = 0_E$ par linéarité. D'où $x - u(a) \in \operatorname{Ker} u$.
Finalement $x = u(a) + x - u(a) \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u$.

TD D4. Dimension finie

1 Sev, bases

Exercice D4.1

Déterminer une base et la dimension des sev suivants.

1. Des polynômes.
   (a) $F_1 = \mathbb{K}_2[X]$,
   (b) $F_2 = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P(1) = 0\}$,
   (c) $F_3 = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
2. Des fonctions.
   (a) $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f' - 2xf = 0\}$,
   (b) $F_8 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' - 2f' + 2f = 0\}$,
3. Des suites.
   (a) l'ensemble F_4 des suites arithmétiques.
   (b) $F_5 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$
   (c) $F_6 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$
4. Des matrices.
   (a) l'ensemble F_9 des matrices 2×2 diagonales,
   (b) l'ensemble F_{10} des matrices 2×2 symétriques,
   (c) l'ensemble F_{11} des matrices 2×2 de trace nulle.

Exercice D4.2 ✿

Montrer que les familles suivantes sont libres.

1. $\big((X-1)^2,\ (X-1)(X+1),\ (X+1)^2\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. $\left(x \mapsto e^x,\ x \mapsto e^{2x},\ x \mapsto e^{x^2}\right)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. $\big((1)_{n\in\mathbb{N}},\ (n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice D4.3

Donner une base et la dimension des sev suivants.

1. $F_1 = \{(4t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$.
3. $F_3 = \{(4t + s, -t + 3s, t + s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + z = 0\}$.
5. $F_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + z - t = 0\}$.
6. $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.
7. $F_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } -x - y + z = 0\}$.
8. $F_8 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + z - t = 0 \text{ et } y + z = 1\}$.

Exercice D4.4 ✿

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $a = (0, 0, 1, 0), b = (1, 1, 0, -1), c = (1, 0, 1, 0), d = (0, -1, 1, 0)$ et $e = (1, 1, 1, 1)$. On définit $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(c, d, e)$. Déterminer les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice D4.5 ✿✿

Montrer que les familles suivantes sont libres

1. $\left(x^k \cos(x))_{k\in\mathbb{N}}\right)$,
2. $\left(\sin^k x)_{k\in\mathbb{N}}\right)$,
3. $(x \mapsto |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}$.

Exercice D4.6 ✿

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sev suivants.

1. $F_1 = \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(2,1,1)\right)$,
2. $F_2 = \mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(2,0,1),(1,1,1)\right)$,
3. $F_3 = \left\{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\right\}$.

Exercice D4.7 ✿✿

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, étant donnée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on définit $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$ et $F = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \widetilde{A}\}$. Montrer que F est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en déterminer la dimension et un supplémentaire.

Exercice D4.8 ✿

Montrer que les sev suivants sont supplémentaires.

1. $F = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$ dans $\mathbb{R}^3$,
2. $F = \mathrm{Vect}\left((1,0,0,1),(0,1,1,0)\right)$ et $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } y-z+t=0\right\}$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. $F = \mathbb{R}_0[X]$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice D4.9 ✿✿

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{I}(A) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid A \text{ divise } P\}$.

1. Montrer que $\mathcal{I}(A)$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$ et en déterminer une base.
2. Soit $a = \deg(A)$ et $n \geqslant a$ un entier. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{I}(A) \cap \mathbb{K}_n[X]$ et donner un supplémentaire de $\mathcal{I}(A)$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice D4.10 ✿✿✿

Soit F et G deux sev d'un ev E de dimension finie. Montrer que $\dim F = \dim G$ si et seulement si F et G ont un supplémentaire commun dans E.

Exercice D4.11 ✿✿✿

Soit E un ev de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des sev de E. Montrer que l'application dim est l'unique application $d : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ qui vérifie

- $\forall F, G \in \mathcal{S},\ (F \cap G = \{0\} \Rightarrow d(F+G) = d(F) + d(G))$,
- $d(E) = n$.

2 Applications linéaires

Exercice D4.12

Déterminer une base du noyau et (si c'est possible) de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, x+z) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f+f' \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$

7. $\begin{array}{rcl} f_7 : \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$

8. $\begin{array}{rcl} f_8 : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + M^\intercal \end{array}$

Exercice D4.13

Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,0,0) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (0,1)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$. Exprimer $f(u)$ pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice D4.14

Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire et déterminer son noyau.
2. Montrer que f induit un endomorphisme f_n sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f_n.
4. En déduire l'image de f.

Exercice D4.15

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f).$$

Exercice D4.16

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice D4.17

Soit E un ev de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est inversible et que $u^{-1} = v$.

Exercice D4.18

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^a st$ et f un endomorphisme nilpotent de E. Notons p son indice de nilpotence.

1. Soit $x \notin \operatorname{Ker}(f^{p-1})$. Montrer que $(f_i(x))_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre
2. En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Exercice D4.19

Soit H_1, H_2 deux hyperplans distincts d'un ev E de dimension finie $n \geqslant 2$. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice D4.20

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout sev F de E, $u(F) \subset F$. Que peut-on dire de u ?

TD D5. Matrices et applications linéaires

Exercice D5.1

Pour chacune des applications suivantes, vérifier que u est linéaire, calculer sa matrice dans les bases canoniques des espaces considérés, calculer son rang et u^{-1} le cas échéant puis à l'aide de la matrice, calculer l'image du vecteur V donné.

1. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-2y-3z) \end{array}$ et $V = (0, 1, -1)$,
2. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP'(X) - P(X) \end{array}$ et $V = X^3 - 3X^2 + X - 1$,
3. $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$ et $V = X^2 - X + 3$,
4. $u : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & EM \end{array}$ avec $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice D5.2 ⚙

Déterminer le noyau et l'image de

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (on montrera aussi que $\operatorname{Ker} B$ et $\operatorname{Im} B$ sont supplémentaires),
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice D5.3

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, notée A.

1. Déterminer $F = \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et justifier que $E = F \oplus G$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminer sa matrice P dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit q la projection sur G parallèlement à F. Déterminer $p + q$, pq, qp ainsi que la matrice Q de q dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que $A = 2P + Q$ et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice D5.4 ⚙

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2)$. On définit l'endomorphisme f par $f(e_1) = e_1 + e_2$ et $f(e_2) = -e_1 + 2e_2$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base e.
2. Soit $v = xe_1 + ye_2$. Calculer dans la base e les composantes x' et y' de $f(v)$.
3. On pose $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$. Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E.
4. Déterminer P_e^{ε} et P_{ε}^{e}.
5. En déduire la matrice B de f dans la base ε.

Exercice D5.5

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On pose $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = 2X^2 - X$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P(X) = X^2 - X + 2$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$?
3. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Exercice D5.6

Soient E un ev de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice D5.7

Montrer que les matrices de chacune des listes suivantes sont semblables.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

Exercice D5.8

Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente (on note p son indice de nilpotence) et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^4$ canoniquement associé à N.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{K}^4$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(u^i(a))_{1 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre.
3. (a) Montrer que si $p = 4$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que si $p = 3$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Montrer que si $p = 2$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice D5.9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Pour quelles valeurs de λ le noyau de $A - \lambda I_3$ est-il non réduit à $\{0\}$?
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale et écrire les matrices de passage correspondantes.

Exercice D5.10

Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\varphi : P \mapsto (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$$

est diagonalisable, *i.e.* qu'il peut être représenté par une matrice diagonale dans une base bien choisie.

Exercice D5.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{array}$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, φ_A est une forme linéaire.
2. Montrer que $A \mapsto \varphi_A$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans son dual $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$

TD D6. Déterminant

1 La théorie

Exercice D6.1

Soient A et B telles que : $AB = BA$, $\det A = 0$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0$. Montrer que $\det(A+B) = 0$.

Exercice D6.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers que l'on suppose inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(A^{-1}) \in \{-1, +1\}$.

Exercice D6.3

On suppose $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$. Calculer

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+i & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} c & c-2b & a \\ f & f-2e & d \\ i & i-2h & g \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} a & b & 2a-c \\ 2g & 2h & 4g-2i \\ d & e & 2d-f \end{vmatrix}$.

Exercice D6.4

À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n = \dim(E)$ existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$?

Exercice D6.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier le rang de la comatrice de A en fonction de celui de A.

Exercice D6.6

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire sur E et linéaire sur $E \times E$. Montrer que φ est nulle.

2 La pratique

Exercice D6.7

Calculer les déterminants suivants (avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} j & j \\ -1 & j \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$,
4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$,
5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$,
6. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 8040 \\ 7 & 2 & 7020 \\ 6 & 1 & 6010 \end{vmatrix}$.

Exercice D6.8 ⚙

Calculer en choisissant la méthode la plus judicieuse :

1. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$,
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$,
5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix}$,
6. $\begin{vmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & 10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ -5 & 5 & 9 & -5 \end{vmatrix}$.

Exercice D6.9 ⚙

On pose $D_1 = 3$. On souhaite calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Pour tout $n > 2$, exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}.
3. Conclure.

Exercice D6.10 ⚙⚙

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 5 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Exercice D6.11 ⚙⚙

Soit $n \geqslant 2$ et $a, b, c, x \in \mathbb{C}$.

On définit $A_n = \begin{pmatrix} a+x & & & & \\ & \ddots & & (b+x) & \\ & & \ddots & & \\ & (c+x) & & \ddots & \\ & & & & a+x \end{pmatrix}$ de taille n. Calculer $D_n = \det(A_n)$.

Exercice D6.12 ✹✹

On définit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots 0 & a_1 & \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\det(\lambda I_n - C) = P(\lambda)$.

Exercice D6.13 ✹

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quels a la matrice A est-elle inversible ? Calculer alors A^{-1}.

Exercice D6.14 ✹✹

Calculer le déterminant de chacun des endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ suivants.

1. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : P(X) \mapsto X \times P'(X+2) + P(1) \cdot (X^3 - 1)$,
2. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f défini pour tout $M \in E$ par $f(M) = M^\intercal$,

Exercice D6.15 ✹✹✹

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on définit une variable aléatoire $X_{i,j}$ telle que $X_{i,j}(\Omega) = \{-1, 1\}$ et elle suit une loi uniforme sur cet ensemble. On suppose également ces variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soit A la matrice de coefficients $X_{i,j}$. Déterminer $\mathbb{E}(\det(A))$ et $\mathbb{V}(\det(A))$.

3 Utilisation

Exercice D6.16 ✹✹

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice représentative de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer en fonction de λ le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$. Pour quelles valeurs de λ est-il nul ?
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale et écrire les matrices de passage correspondantes.

Exercice D6.17 ✹✹

Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $((X-i)^n)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice D6.18 ✹✹

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'unique solution du système $AX = B$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, si on note A_j la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j-ième colonne par B, montrer que $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$.

Exercice D6.19 ✹✹✹

Soit $n \geqslant 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose semblables sur $\mathbb{C}$; c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $A = PBP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

TD D7. Espaces préhilbertiens

1 Produit scalaire

Exercice D7.1

Pour chaque espace E, dire si l'application φ est un produit scalaire. Le cas échéant, calculer la norme de u pour la norme associée à ce p.s.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2yy' + zz'$, $u = (1,2,3)$,
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$, $u = X$,
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^t P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, $u = 1$,
4. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, $u = 1$,
5. $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ et $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$, $u = \exp$,
6. $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ et $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$, $u = \exp$,
7. $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ et $\varphi(f,g) = f(1)g(1) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$, $u = \exp$,
8. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^\intercal B)$, $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D7.2

Soit E un espace préhilbertien pour le produit scalaire $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$. Soit $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs normés de E tels que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle^2$. Montrer que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice D7.3

Soit $(E, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\varphi : (x,y) \mapsto \langle u(x), u(y) \rangle$ soit un produit scalaire.

Exercice D7.4

Soit $\mathcal{B} = \{(1,2),(3,-1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

Exercice D7.5

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$. Déterminer l'existence et la valeur de la borne inférieure de

$$A = \left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \mid f \in E \right\}.$$

Exercice D7.6

Soit E un espace euclidien de dimension n, on note *aps* le produit scalaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que u est une **isométrie vectorielle** de E, *i.e.* $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
   (a) Montrer que $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
   (b) Montrer que u est bijectif.
2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. Montrer que $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe.
3. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que

$$u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est une b.o.n. de } E.$$

2 Orthogonalité et projections

Exercice D7.7

Soit E un espace préhilbertien et F, G deux sev de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, avec égalité si E est de dimension finie.

Exercice D7.8

Soit ℓ^2 l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$ converge.

1. Montrer que pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans $\mathbb{R}^2$, la série $\sum x_n y_n$ est convergente.
2. Montrer que $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ définit un produit scalaire sur ℓ^2.
3. Soit F l'ensemble des suites presque nulles (*i.e.* dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux). Déterminer $F^\perp$ et comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice D7.9

Soit E l'espace vectoriel des applications continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice D7.10

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Monter que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $F^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F puis la distance de J à F.

Exercice D7.11 ✿

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormée pour F.
3. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice D7.12 ✿✿✿

Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice D7.13 ✿✿

Soit $(E, \langle \cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E.

1. Théorème de représentation de Riesz. Soit $\varphi \in E^*$. Montrer qu'il existe un unique $a \in E$ tel que
$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle x, a\rangle.$$
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto \langle u(y), x\rangle$ est une forme linéaire. D'après ce qui précède, il existe donc un unique vecteur noté $u^*(x)$ tel que $\forall y \in E$, $\langle u(y), x\rangle = \langle y, u^*(x)\rangle$. Ceci définit une application u^*, appelée **adjoint de** u.
   (a) Déterminer $(\mathrm{Id}_E)^*$.
   (b) Montrer que $u \mapsto u^*$ est une symétrie de $\mathcal{L}(E)$.
   (c) Montrer que $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^\mathsf{T}$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$.
5. Soit F un sev de E. Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.

Cinquième partie

De alea et probabilitate

TD E1. Dénombrement

Exercice E1.1 ✹

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble fini E. Montrer que

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) = &\operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C \\ &- \operatorname{Card}(A \cap B) - \operatorname{Card}(B \cap C) - \operatorname{Card}(A \cap C) \\ &+ \operatorname{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

✹✹ On pourra tenter de généraliser cette formule à la réunion de n parties de E.

Exercice E1.2 ✹

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que

1. $x + y + z = n$,
2. $x + y + z \leqslant n$.

Exercice E1.3 ✹

Combien peut-on trouver d'anagrammes au mot

1. SIX
2. MATHS
3. CHIMIE
4. VINGTHUIT
5. ANAGRAMME
6. QUATRECENTQUATREVINGTSEIZE

Exercice E1.4 ✹

On tire successivement et avec remise 5 boules d'une urne qui en contient 9, numérotées de 1 à 9.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Dénombrer l'ensemble des tirages contenant
   (a) au moins une fois la boule 9 ;
   (b) exactement deux fois la boule 2 ;
   (c) trois fois la boule 3 et une fois la boule 1.
3. Dénombrer l'ensemble des tirages tels que
   (a) le 2ᵉ tirage ait donné la boule 1 ;
   (b) La boule 1 ait été tirée pour la deuxième fois lors du 3ᵉ tirage

Exercice E1.5 ✹

On tire 3 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes classique (13 valeurs, 4 couleurs).

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Dénombrer l'ensemble des tirages contenant
   (a) trois cartes de même valeur ;
   (b) exactement deux cartes de la même couleur ;
   (c) deux ou trois cartes de la même couleur ;
   (d) au moins un trèfle ou un valet.

Exercice E1.6

On lance trois fois de suite un dé classique. Combien y a-t-il de tirages donnant des résultats classés

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant (au sens large) ?

Exercice E1.7

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ de parties deux à deux disjointes vérifiant $A \cup B \cup C = E$.

Exercice E1.8

Soit F un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble de cardinal $n+1$. Dénombrer les surjections de E dans F

Exercice E1.9

Pour gagner du temps, le Père Noël a choisi de distribuer des cadeaux identiques à tout le monde cette année. En survolant un petit village de 20 maisons, il jette 30 cadeaux qui atterrissent tous aléatoirement dans une des 20 maisons.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles des 30 cadeaux ?
2. Combien y a-t-il de répartitions telles que tout le monde reçoive au moins un cadeau ? Qu'au moins une famille ne reçoive rien ?
3. Mêmes questions avec p maisons et n cadeaux.

Exercice E1.10

La MPSI et la MP2I se lancent un défi sportif. Les deux classes comptent chacune n volontaires parmi lesquels il s'agit de constituer une équipe de p concurrents, dont 1 capitaine.

1. La MPSI choisit tout d'abord les p concurrents qui élisent ensuite un capitaine parmi eux. Combien d'équipes peuvent-elles être ainsi formées ?
2. La MP2I choisit tout d'abord son capitaine parmi les volontaires puis ce dernier désigne les autres membres de son équipe. Combien d'équipes peuvent-elles être ainsi formées ?
3. Quelle formule avons-nous démontrée ?

Exercice E1.11

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal np. Déterminer de deux manières différentes le nombre de partitions de E en n partie de p éléments chacune.

Exercice E1.12

En dénombrant un certain ensemble de deux manières différentes, démontrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

TD E2. Probabilités sur un univers fini

Exercice E2.1 Dans un espace probabilisé, soit deux événements A et B tels que $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et $P(B) = \dfrac{1}{4}$.

1. Donner un encadrement de $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Calculer $P(A \cup B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$. Même question si $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.

Exercice E2.2 ✲

Je permute aléatoirement les lettres du mot ANANAS. Quelle est la probabilité que j'obtienne encore le mot ANANAS ?

Exercice E2.3

On lance trois fois de suite un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir des résultats classés

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant (au sens large) ?

Exercice E2.4 ✲

Un dé pipé est tel que chaque résultat i a une fréquence d'apparition proportionnelle à i^2. On lance une fois ce dé et on observe le résultat. Décrire l'univers et déterminer la loi de probabilités associés à cette expérience.

Exercice E2.5 ✲✲

Une loterie, organisée chaque semaine, vend 100 billets à 1 euro chacun, dont 3 sont gagnants. Je souhaite investir 5 euros pour obtenir au moins un billet gagnant. Ai-je intérêt à acheter 5 billets la même semaine ou un billet par semaine pendant 5 semaines ?

Exercice E2.6 ✲ *(un problème du Chevalier de Méré)*

1. On lance un dé (classique) 4 fois de suite. Montrer qu'il est avantageux de parier sur l'obtention d'au moins un six.
2. Que dire de l'obtention d'un double-six en lançant 24 fois de suite deux dés classiques ? *(calculatrices autorisées)*

Exercice E2.7 ✲

Soit $\Omega = [\![0, n]\!]$. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que P soit une probabilité sur Ω si on pose

$$\forall k \in \Omega,\ P(\{k\}) = \frac{\lambda}{3^k}\binom{n}{k}.$$

Exercice E2.8 ✲

Dans une usine, deux machines A et B produisent des pièces. On constate que A assure 60% de la production de l'usine. Cependant 5% des pièces qu'elle produit sont défectueuses alors que c'est le cas pour seulement 3% des pièces produites par la machine B.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce sortant de l'usine soit défectueuse.
2. On examine une pièce à la sortie de l'usine et on constate qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine A ?

3. Même question avec une pièce de bonne qualité.

Exercice E2.9 ✿

On a 4 boîtes B_1, B_2, B_3 et B_4. Dans la boîte B_i, on a i boules noires et $(4-i)$ boules blanches. On choisit aléatoirement une boîte, la boîte B_i ayant pour probabilité d'être choisie $\frac{i}{10}$ puis on tire une boule de cette boîte.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?
2. Si la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle vienne de la boîte n° 3 ?

Exercice E2.10 ✿ *(plus d'information = moins de certitudes)*

1. Une dame vous raconte sa vie : « Vous savez, j'ai deux enfants, dont une fille... ». Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
2. et elle poursuit : « ...une fille qui est mon aînée et... ». Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice E2.11 ✿✿

Dans une population donnée, un individu sur 8 est blond. Par ailleurs, deux blonds sur 3 ont les yeux bleus et 80% des individus aux yeux bleus sont blonds ? Quelle est la proportion des individus de cette population qui possèdent les yeux bleus sans être blonds ?

Exercice E2.12 ✿✿

Une urne contient trois boules jaunes et une boule bleue. On effectue des tirages successifs et avec remise d'une boule de cette urne, et ce jusqu'à obtenir la boule bleue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :
J_n : j'ai obtenu une balle jaune au n-ième tirage,
B_n : j'obtiens la balle bleue au n-ième tirage,
A : l'expérience a une fin.

1. Montrer que les événements B_n sont deux à deux incompatibles.
2. Exprimer l'événement B_n à l'aide des J_i.
3. Déterminer $P(F)$.

Exercice E2.13 ✿✿

On lance 100 fois de suite un dé équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois un résultat pair ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement $2k$ fois un résultat pair ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de fois un résultat pair ?

Exercice E2.14 ✿✿

Étant donné $N \geqslant 2$, Indiana Jones tente de franchir N obstacles successifs, tous du même type : pour tout $i \geqslant 1$, à la i^{e} étape, il a le choix entre i portes (sans aucun indice) dont une seulement lui permet de poursuivre et les autres débouchent sur un piège mortel. Pour tout i, on définit les événements A_i : « Indiana a franchi la i^{e} étape » et B_i : « Le dernier obstacle franchi est le i^{e}. ». Évidemment, si Indiana ne franchit pas un obstacle, il ne franchit alors pas les suivants puisqu'il est mort.

1. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, calculer $P(A_i)$.

2. Montrer que $\forall 1 \leqslant i \leqslant N-1$, $P(B_i) = \dfrac{1}{i!} - \dfrac{1}{(i+1)!}$.
3. Que vaut $P(B_N)$?

Exercice E2.15 ✿✿

Donner un exemple d'expérience aléatoire menant à un univers fini et de trois événements tels qu'ils soient deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice E2.16 ✿✿ *(Indicatrice d'Euler)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers (avec les p_i tous distincts et les α_i non nuls). On appelle indicatrice d'Euler de n le nombre $\phi(n)$ d'entiers de $[\![1, n-1]\!]$ qui sont premiers avec n. On considère l'univers $\Omega = ([\![1, n]\!])$ muni de la probabilité uniforme P.

1. Si d est un diviseur de n, on note M_d l'ensemble des multiples de d dans Ω. Calculer $P(M_d)$.
2. Montrer que les M_{p_i} sont mutuellement indépendants ($1 \leqslant i \leqslant r$).
3. En déduire que
$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_i}).$$

Exercice E2.17 ✿✿

Lors d'une pause bien méritée au cours de la conception de cette feuille de TD, j'observe une mouche qui vole de sommet en sommet sur l'abat-jour triangulaire de ma chambre. À l'instant 0, elle se trouve sur le sommet A et je remarque que

- si elle est sur le sommet A à un instant donné, elle vole vers le B ou le C de manière équiprobable à l'instant suivant,
- si elle est sur le sommet B à un instant donné, elle vole vers le A ou le C de manière équiprobable à l'instant suivant,
- si elle est sur le sommet C à un instant donné, elle y reste enfin définitivement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (resp. B_n et C_n) l'événement : « la mouche est sur le sommet A (resp. B et C) à l'instant n. » et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Déterminer une relation vérifiée par les termes de la suite (c_n).
3. En déduire l'expression de c_n en fonction de n. Interpréter.

TD E3. Variables aléatoires

1 Variables aléatoires réelles

Exercice E3.1 ✲

Déterminer la loi de la variable aléatoire X dans chacune des expériences suivantes.

1. Je range au hasard mes 25 paires de chaussettes dans les trois tiroirs de ma commode. X désigne le nombre de paires de chaussettes dans le tiroir du haut.
2. Je possède 10 poules, 10 chats et 10 scarabées. J'organise une loterie et tire au hasard un de mes animaux de compagnie. X désigne le nombre de pattes du vainqueur.
3. En salle des profs, il y a 6 profs de maths, 3 profs d'histoire et 5 profs d'anglais. 10 fois de suite un élève vient déposer un document dans un casier et frappe à la porte. Les profs tirent au sort celui qui va lui ouvrir. X désigne le nombre de fois où un prof d'anglais a été dérangé.
4. J'ai 12 enfants. X désigne le nombre de fils que j'ai.
5. 10% des gens sont gauchers. Je vends des ciseaux pour droitier et des ciseaux pour gaucher. Cette semaine, j'ai eu 100 clients. X désigne le nombre de ciseaux pour gaucher vendus.

Exercice E3.2

On considère le jeu suivant : je joue à pile ou face avec mon petit cousin et lance deux fois de suite une pièce équilibrée. Si j'obtiens deux résultats identiques, je lui donne 3 euros ; sinon il me donne 1 euro si le premier lancer a fait pile, 2 euros si le premier lancer a fait face. Décrire un espace probabilisé modélisant ce jeu et définir une variable aléatoire G désignant le gain de mon petit cousin. Donner la loi de G. Mon petit cousin a-t-il intérêt à me réclamer de jouer plusieurs fois à ce jeu ?

Exercice E3.3

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $3, 4, 5$ et 6. Soit $Y = 4X - 2$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que $P(X = 3) = P(X = 4)$, $P(X < 5) = \dfrac{1}{3}$ et $P(X > 5) = \dfrac{1}{4}$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X et Y.

Exercice E3.4

La v.a. X suit une loi binomiale d'espérance 5 et d'écart-type 2. Calculer $P(X = 6)$.

Exercice E3.5 ✲✲ **(Loi du maximum)**

On dispose d'une urne contenant $n + 1$ boules numérotées de 0 à n. On en tire deux simultanément. X représente le plus grand des deux numéros tirés et Y le plus petit.

1. Calculer la loi de X.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(Y \geqslant k)$.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice E3.6 ✲

On dispose de deux paquets de biscuits qui en contiennent chacun n. On choisit aléatoirement un des deux paquets et on mange un biscuit. Puis on recommence, et ce jusqu'à ce qu'une des deux boîtes soit vide. On appelle X le nombre de biscuits restant dans l'autre paquet. Déterminer la loi de X.

Exercice E3.7 ✲

Étant donné $A \in \mathcal{P}(A)$, on définit la variable aléatoire indicatrice par : $\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Soit A, B, C des événements tels que $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = P(C) = \dfrac{5}{12}$, $P(A \cap B) = P(B \cap C) = \dfrac{1}{3}$, $P(A \cap C) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4}$. On pose $X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$. Donner la loi de X.
2. Vérifier avec l'expérience du lancer de deux dés, X désignant la somme des deux lancers, et les événements $A = [X \in \{4, 6, 7, 9\}]$, $B = [X \in \{2, 3, 4, 6, 9\}]$ et $C = [X \in \{2, 3, 6, 9, 11, 12\}]$.

Exercice E3.8 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = 2^X$

Exercice E3.9 ✲✲

Dans une urne possédant N boules dont B blanches et R rouges,

1. on tire n fois successivement une boule avec remise. On appelle X le nombre de boules blanches. Déterminer la loi de X.
2. on tire simultanément n boules. On appelle X le nombre de boules blanches. Déterminer la loi de X.
3. on tire n fois successivement une boule sans remise. On appelle X le nombre de boules blanches. Déterminer la loi de X.

Exercice E3.10 ✲✲

On dispose de p urnes numérotées de 1 à p, telles que l'urne numéro k contienne k boules noires et $p - k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard, puis on y effectue des tirages avec remise. Calculer la probabilité de l'événement $A_{n,p}$: « on a obtenu n boules noires en $2n$ tirages. » On peut se demander la limite $\lim\limits_{p \to +\infty} P(A_{n,p})$. On renvoie pour cela au chapitre sur l'intégration de Riemann

Exercice E3.11 ✲

On joue 100 fois à PILE ou FACE avec une pièce non truquée. On appelle F la variable aléatoire associée au nombre de fois qu'on a obtenu FACE.

1. Quelle est la loi de F ?
2. Donner son espérance et son écart-type.
3. On considère l'événement A : obtenir un nombre de FACE strictement compris entre 40 et 60. Écrire une expression exacte de la probabilité de l'événement A puis en donner une minoration.

Exercice E3.12 ✲✲

On considère une expérience aléatoire et un événement A tel que $P(A) = p \in [0, 1]$. On répète N fois l'expérience et on note X_N la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que A s'est réalisé. On note $S_N = \dfrac{X_N}{N}$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_N. En déduire l'espérance et la variance de S_N.
2. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_N
3. Pour quelle valeur de N la valeur de S_N a-t-elle plus de 95% de chances d'être une valeur approchée de p à 10^{-2} près ?

2 Familles de variables aléatoires

Exercice E3.13 ✻

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance un dé équilibré à n faces. Son résultat est représenté par la variable aléatoire X. Si $X = k$ est réalisé, on constitue une urne avec k boules numérotées de 1 à k. Puis on tire une boule dans l'urne et son numéro est représenté par la variable Y.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi marginale de Y, ainsi que son espérance.

Exercice E3.14 ✻✻

Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant les lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Montrer que $P(X = k | X + Y = r) = \dfrac{\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}}{\binom{m+n}{r}}$.

Exercice E3.15 ✻

Dans une urne contenant n jetons numérotés, on en tire 2, avec remise. On note (r, s) les deux numéros obtenus. Puis on tire une boule au hasard dans une urne qui en contient r rouges et s jaunes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j}$.
2. Quelle est la probabilité d'avoir une boule verte ? Commenter.

Exercice E3.16 ✻

Dans une urne contenant n jetons numérotés, on en tire 2 successivement, sans remise. On note X le numéro du premier, Y le numéro du second. Les VA X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer les lois de X, Y et (X, Y).

Exercice E3.17 ✻

Soit $p \in [0, 1]$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Bernoulli de paramètres respectifs p et q. On note $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (S, D).
2. Déterminer la covariance de S et D. Sont-elles indépendantes ?

Exercice E3.18 ✻✻

En attendant le concert de Taylor Swift, les fans vont manger un morceau. Les n fans choisissent aléatoirement (et individuellement) un des p stands de nourriture. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note X_i le nombre de fans qui se dirigent vers le stand numéro i.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i.
2. Soit $i, j \in [\![1, p]\!]$ tels que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X_i + X_j$.
   (b) En déduire la covariance de X_i et X_j.
3. Pour tout $I \subset [\![1, p]\!]$, on note $Y_I = \displaystyle\sum_{i \in I} X_i$.
   (a) Soit $I \subset [\![1, p]\!]$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_I en fonction du cardinal de I.
   (b) Soit I, J deux parties de $[\![1, p]\!]$. Déterminer $\text{Cov}(Y_I, Y_J)$ si I et J sont disjointes puis traiter le cas général (en fonction de $|I|, |J|$ et $|I \cap J|$).