TD A1. Ensembles de nombres

1 Égalités, inégalités

Exercice A1.1

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $1 \leqslant a \leqslant 4$ et $3 \leqslant b \leqslant 5$. Encadrer $a-b$, $(a-b)^2$ et $\dfrac{ab}{a+b}$.

Exercice A1.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{8-x} = x-2$,
2. $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$,
3. $x+1 < \sqrt{x+4}$,
4. $\sqrt{x^2-5x+4} > 2x+1$.

Exercice A1.3

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $|4-x| = x$,
2. $|x^2+x-3| = x$,
3. $|-3x+4| + |5-x| = 10$,
4. $|x-3| = |2x+1|$,
5. $\sqrt{1-2x} = |x+7|$,
6. $x|x| = 3x+2$.

Exercice A1.4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{4x-1}{2x+1} \geqslant 1$,
2. $|x-3| \leqslant 1$,
3. $|3x-2| \geqslant 4$,
4. $|x-2| > 2x-1$,
5. $|x^2-6x+4| \leqslant 1$,
6. $|2x-11| < |x-5|$,
7. $|x+3| > |x^2-3|$,
8. $\sqrt{|x+2|} > |x-10|$.

Exercice A1.5

Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leqslant y$, on définit $A = \dfrac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$ et $H = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$. Montrer que

$$x \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant y.$$

Exercice A1.6

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On note $m = \min\{x, y\}$ et $M = \max\{x, y\}$ respectivement le plus petit et le plus grand de ces deux nombres.

1. Exprimer $m+M$ et $M-m$ en fonction de x et y, faisant éventuellement apparaître une valeur absolue.
2. En déduire une expression de m et M en fonction de x et y.

Exercice A1.7

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et étudier le cas d'égalité.
2. Démontrer que $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

2 Nombres rationnels

Exercice A1.8 ✲

Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde les propositions suivantes.

1. Le produit d'un nombre rationnel non nul par un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
2. La racine carrée d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
3. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice A1.9 ✲✲

Soit $a = 20 + 14\sqrt{2}$ et $b = 20 - 14\sqrt{2}$.

1. Justifier que a et b sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt[3]{ab}$.
3. On note $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$. En exprimant c^3, montrer que c est rationnel.

3 Parties entières

Exercice A1.10

Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Exercice A1.11 ✲

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice A1.12 ✲✲

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$.