DEVOIR MAISON N° 1

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Pour tout nombre entier $n \geqslant 2$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction f_n par

$$\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

Étude de fonctions

1. Étudions les fonctions f_n.
   (a) Pour tout $x > 0$, exprimer $f_n'(x)$ sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln x$.
   (b) Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$ et étudier le signe de $f_n'(x)$.
   (c) Déterminer les limites de f_n en 0 et $+\infty$. On pourra utiliser que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f_n et calculer (en fonction de n) sa valeur maximale.
2. Tracé de quelques courbes.
   (a) Donner une allure des courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
   (b) Pour $n \geqslant 0$, calculer $f_{n+1} - f_n$.
   (c) Comment peut-on déduire de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ l'allure de la courbe $\mathscr{C}_4$?

Un bol d'aires

3. Calculer la dérivée de g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{e}$.
5. Déduire de ce qui précède l'aire (en unités d'aire) du domaine du plan compris entre les courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$ et les droites $x = 1$ et $x = e$.
6. On appelle A_n l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$.
   (a) Calculer A_2.
   (b) Déterminer la nature de la suite (A_n) et interpréter géométriquement sa raison.
   (c) Exprimer A_n en fonction de n.

Étude de l'équation $f_n(x) = 1$

Pour toute la fin du problème, on suppose $n \geqslant 3$.

7. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$.

   (b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1, e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

8. Pour $t \geqslant 1$, on pose $h(t) = \dfrac{\ln t}{t}$.

   (a) Étudier les variations de h.

   (b) En déduire que pour tout $t > 1$, $h(t) \leqslant \dfrac{1}{e}$ puis que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n(n) < 1$.

9. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ a exactement une solution sur l'intervalle $\left]e^{\frac{n-2}{2n}}, n\right[$. On la note α_n.

10. Combien l'équation $f_n(x) = 1$ a-t-elle de solutions sur $]0, +\infty[$?

11. (a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que pour tout $n \geqslant e^2$, $f_n(\sqrt{n}) > 1$.

    (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 8$, on a $\sqrt{n} < \alpha_n < n$. *(on pourra utiliser que* $\ln(2) > 2/3$*)*

    (c) Donner la limite de la suite α_n.