

Problème 1

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1 + n \ln(x)}{x^2}$.

Étude de fonctions

1. (a) f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\text{Pour tout } x \in]0, +\infty[, f'_n(x) = \frac{nx - 2x(1 + n \ln x)}{x^4} = \frac{n - 2 - 2n \ln x}{x^3}.$$

(b)

$$\frac{n - 2 - 2n \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow n - 2 - 2n \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{n - 2}{2n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{n-2}{2n}}.$$

Ainsi $f'_n(x) \geq 0$ pour $x \leq e^{\frac{n-2}{2n}}$ et $f'_n(x) \leq 0$ pour $x \geq e^{\frac{n-2}{2n}}$.

(c) **En 0 :**
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 1 + n \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par produit, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty}.$$

En $+\infty$: $f_n(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{n \ln(x^2)}{2x^2}$. *Astuce classique :* $\ln x = \frac{1}{2} \ln(x^2)$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par croissances comparées. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$ (par composition).

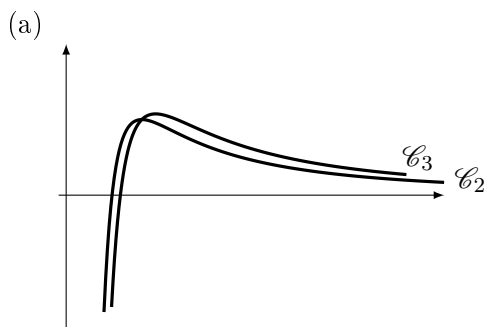
De plus $\lim_{1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0}$.

(d) En notant désormais $a = e^{\frac{n-2}{2n}}$,

x	0	a	$+\infty$
$f'_n(x)$		$\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array}$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$f_n(a)$	0

Le maximum de f_n est atteint en a et vaut $\boxed{f_n(a) = \frac{n}{2e^{\frac{n-2}{n}}}}$.

2. Tracé de quelques courbes.



(b) Pour tous $n \geq 0$ et $x > 0$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

(c) Cet écart ne dépend pas de n . Donc pour tracer $\mathcal{C}_4$, il suffit de reporter à partir de $\mathcal{C}_3$ l'écart observé pour chaque abscisse entre $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Un bol d'aires

3. g est dérivable et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$.

4. Donc

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = [g(x)]_1^e = \left[\frac{-2}{e} + 1 \right].$$

5. Sur $[1, e]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ donc $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$. L'aire en question est alors donnée par

$$\int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[1 - \frac{2}{e} \right].$$

6. (a) $A_2 = \int_1^e \left(\frac{1 + 2 \ln x}{x^2} \right) dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e + 2 \left(1 - \frac{2}{e} \right) = \left[3 - \frac{5}{e} \right].$

(b) $A_{n+1} - A_n = \int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = 1 - \frac{2}{e}$ donc (A_n) est une suite arithmétique de raison $1 - \frac{2}{e}$. Cette raison correspond à l'aire calculée à la question 5, comprise entre les courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$.

(c) Alors pour tout $n \geq 0$, $A_n = A_0 + n \left(1 - \frac{2}{e} \right)$. Or $A_0 = \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{e}$ (déjà calculé).

Donc $A_n = 1 + n - \frac{1 + 2n}{e}$.

Étude de l'équation $f_n(x) = 1$

7. (a) Pour tout $n \geq 3$, $\frac{n-2}{2n} > 0$ donc $\left[e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \right]$. De plus, $f_n \left(e^{\frac{n-2}{2n}} \right) = f_n(a) = \frac{n}{2e^{\frac{n-2}{n}}}$.

- On a toujours $e^{\frac{n-2}{n}} < e$. Donc $f_n(a) > \frac{n}{2e}$. Pour $n \geq 6$, $e < 3$ donc $f(a) > \frac{6}{2 \times 3} = 1$.
- Pour $n = 5$, $e < 3$ donc $e^3 < 27 < 32 = 2^5$. Donc $e^{3/5} < 2$. Donc $\frac{n}{2e^{3/5}} > \frac{5}{2 \times 2} > 1$.

- Pour $n = 4$, $e < 4$ donc $\sqrt{e} < 2$. Donc $\frac{4}{2e^{1/2}} > \frac{4}{2 \times 2} = 1$.
- Pour $n = 3$, $e < 3 < \frac{27}{8}$ donc $e^{1/3} < \frac{3}{2}$. D'où $\frac{n}{2e^{1/3}} > \frac{3}{2 \times 3/2} = 1$.

On a donc montré que dans tous les cas pour $n \geq 3$, $\boxed{f_n(a) > 1}$.

- (b) f est strictement monotone sur l'intervalle $]1, e^{\frac{n-2}{2n}}[$ et ne prend que des valeurs strictement supérieures à 1 d'après ce qui précède.

Donc l'équation $f_n(x) = 1$ n'a $\boxed{\text{pas de solution sur }]1, e^{\frac{n-2}{2n}}[}$.

8. (a) h est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour $t \geq 1$, $h'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$. L'étude du signe de $h'(t)$ donne les variations suivantes.

t	1	e	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	0	$\nearrow 1/e$	$\searrow 0$

- (b) D'après les variations précédentes, $\boxed{h(t) \leq \frac{1}{e}}$.

Par ailleurs, $f_n(n) = \frac{1 + n \ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{\ln n}{n}$. Or $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{4}$ et $\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$. Donc $\boxed{n \geq 3, f_n(n) < 1}$.

9. Sur l'intervalle $]e^{\frac{n-2}{2n}}, n[$, f_n est strictement décroissante de $f_n(a) > 1$ à $f_n(n) < 1$. Donc d'après le théorème de la bijection, il existe dans cet intervalle $\boxed{\text{un unique } \alpha_n \text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 1}$.

10. D'après les variations étudiées précédemment, f_n réalise une bijection de $[0, a]$ dans $] -\infty, f(a)]$ et de $[a, +\infty[$ dans $]0, f(a)[$, avec $f(a) > 1$. D'après le théorème de la bijection appliqué sur chacun de ces intervalles,

$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 1 \text{ admet 2 solutions sur }]0, +\infty[}$.

11. (a) $f_n(\sqrt{n}) = \frac{1 + n \ln(\sqrt{n})}{n} = \frac{1}{n} + \ln(\sqrt{n})$.

Pour tout $n \geq e^2$, $\sqrt{n} \geq e$ donc $f_n(\sqrt{n}) \geq \frac{1}{n} + 1$, d'où $\boxed{f_n(\sqrt{n}) > 1}$.

- (b) Donc pour tout $n \geq 8$, on a $f_n(\sqrt{n}) > f_n(\alpha_n) > f_n(n)$ avec f_n strictement décroissante sur cet intervalle, donc $\boxed{\sqrt{n} < \alpha_n < n}$.

- (c) $\alpha_n > \sqrt{n}$ donc par comparaison, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty}$.