

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

### Problème 1

Les différentes questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation :  $\cos(3x) - \cos x = \sin x \sin(4x)$ .
2. Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'équation  $\cos(4x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$ .
3. (a) Déterminer les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .  
 (b) En déduire les solutions réelles de l'équation :  $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$ .
4. (a) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$ .  
 (b) En déduire la valeur de  $S(x) = \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

### Problème 2

Les différentes questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

1. Des parties entières.
  - (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ .
  - (b) Montrer que  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor)$  ?
  - (c) Montrer que  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$ .
2. Des valeurs absolues.
  - (a) Montrer que  $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$ .
  - (b) Montrer que  $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$ .
  - (c) Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $u(a) = \frac{|a|}{1 + |a|}$ . Montrer que  $u(x + y) \leq u(x) + u(y)$ .