

TD A3. Calculs algébriques

1 Sommes et produits

Exercice A3.1 ⚙

Montrer que pour tout $n > 1$ entier, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$.

Exercice A3.2 ⚙

Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'éléments de $[0, 1]$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \sum_{i=1}^n a_i \leq \prod_{i=1}^n (1 - a_i).$$

Exercice A3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right),$
2. $\sum_{k=1}^n (3^k - 2k + n - 1),$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!},$
4. $\sum_{k=0}^n (2k+1)^2$ (de deux manières différentes),
5. ⚙ $\sum_{k=1}^n k 2^k$ (poser $j = k - 1$),
6. ⚙ $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right),$
7. ⚙ $\sum_{k=1}^{2n} |n - k|,$

Exercice A3.4

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. ⚙ Déterminer deux réels c et d tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+2)} = \frac{c}{k} + \frac{d}{k+2}$. En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice A3.5 ⚙

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right)$.

Exercice A3.6 ⚙

1. Rappeler pourquoi $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.



2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Exercice A3.7 ⚙️

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$ et en déduire $\sum_{k=0}^{2n} \max(k, n)$.

Exercice A3.8

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculer

1. $\prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}},$
2. $\prod_{k=0}^n (2k+1),$
3. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$

Exercice A3.9

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire les expressions suivantes avec le symbole produit puis à l'aide de factorielles.

1. $A = (p+1)(p+2) \dots (p+n),$
2. $B = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2p,$
3. $C = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p+1).$

Exercice A3.10 ⚙️⚙️

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right).$

2 Coefficients binomiaux

Exercice A3.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k},$
3. $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}.$

Exercice A3.12 ⚙️

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ (formule du Chef).
2. En déduire $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$

Exercice A3.13 ⚙️

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{2k}$ et $B = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{2k+1}.$

1. Exprimer $(1 + \sqrt{2})^n$ et $(1 - \sqrt{2})^n$ à l'aide de A et B .
2. En déduire les valeurs de A et B .

3 Sommes doubles

Exercice A3.14 ⚙️

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j},$

2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i,$

3. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i,$

4. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j),$

5. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (ij),$

6. $\sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \frac{1}{i}.$

Exercice A3.15 ⚙️

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$ et $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

2. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|.$

Exercice A3.16

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$