Devoir maison n° 3

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

On pose $s(1) = 1$, $s(2) = 3 + 5$, $s(3) = 7 + 9 + 11$, et ainsi de suite, si bien que pour $n \geqslant 2$, $s(n)$ désigne la somme des n nombres impairs suivant ceux qui apparaissent dans $s(n-1)$.

1. Calculer $s(i)$ pour $i \in [\![1, 4]\!]$ et émettre une conjecture sur la valeur de $s(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $I(k)$ le k-ième entier naturel impair.
   (a) Donner la valeur de $I(k)$ en fonction de k.
   (b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on appelle $A(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} I(k)$. Calculer $A(N)$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s(i)$. Calculer $B(n)$.
   (d) En déduire une expression simple de $s(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déduire des résultats précédents une expression factorisée de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3$ en fonction de n.

Problème 2

Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p > 1$, $q > 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels positifs. Le but du problème est de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1. Si les nombres a_k sont tous nuls ou si les b_k sont tous nuls, justifier l'inégalité recherchée.

On suppose dans la suite que les a_k ne sont pas tous nuls et que les b_k ne sont pas tous nuls. On pose alors $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^p$ et $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^q$.

2. Pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, on définit $f : x \mapsto ax - \dfrac{a^p}{p} - \dfrac{x^q}{q}$.
   (a) Étudier f jusqu'à obtenir un tableau de variations complet.
   (b) En déduire que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.
3. Cas particulier : on suppose (dans cette question seulement) que $A = B = 1$. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant 1$.

4. Cas général (sans hypothèse particulière sur A et B).

   (a) On définit pour tout k : $u_k = \dfrac{a_k}{A^{1/p}}$ et $v_k = \dfrac{b_k}{B^{1/q}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^p$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k^q$.

   (b) Conclure en établissant l'inégalité voulue.