

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos(3x) - \cos x &= \sin x \sin(4x) \Leftrightarrow -2 \sin(2x) \sin x = \sin x \sin(4x) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin x \sin(2x) (\cos(2x) + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = -1 \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi] \text{ ou } 2x \equiv 0 [\pi] \text{ ou } 2x \equiv \pi [2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi] \text{ ou } x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

En effet, si $x \equiv 0 [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors en particulier, $x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Soit $x \in [0, 2\pi[$. $\sin(x) \in [-1, 1]$ donc $\lfloor \sin(x) \rfloor \in \{-1, 0, 1\}$.

1^{er} cas : $\lfloor \sin(x) \rfloor = 1$. Alors $x = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, $\cos(4x) = 1$, donc on a une solution de l'équation.

2^e cas : $\lfloor \sin(x) \rfloor = 0$. Alors $x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. On résout

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= 0 \Leftrightarrow 4x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{k\pi}{8} \mid k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}\right\}. \end{aligned}$$

Parmi ces valeurs, seules $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$ sont dans $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

3^e cas : $\lfloor \sin(x) \rfloor = -1$. Alors $x \in]\pi, 2\pi[$.

On résout $\cos(4x) = -1 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

Parmi ces valeurs, seules $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ sont dans $]\pi, 2\pi[$.

Finalement les solutions sont $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

3. (a) En utilisant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}.$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\cos x + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\sin x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]\end{aligned}$$

$$\boxed{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2 \Leftrightarrow x \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]}.$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\cos^4 x + \sin^4 x &= (1 - \sin^2 x)^2 + \sin^4 x = (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) + \sin^4 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, on a

$$\begin{aligned}S(x) &= \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos^4 x + \left(-\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^4 + (-\sin(x))^4 + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos^4 x + \sin^4 x + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) \\ &= 2 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) - \frac{1}{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) - \frac{1}{2}\cos^2(2x) = 2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{S(x) = \frac{3}{2}}.$$

Problème 2

Soit $x, y \in \mathbb{R}$

1. Des parties entières.

(a) On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. En ajoutant n aux trois membres on obtient

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1.$$

et $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$. Par unicité dans la définition de $\lfloor x + n \rfloor$,

$$\boxed{\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n}$$

(b) Posons $m = \lfloor x \rfloor$ et $n = \lfloor y \rfloor$. Alors

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

En sommant, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, soit $0 \leq \lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) < 2$.

Comme $\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) \in \mathbb{Z}$, on a

$$\boxed{\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) \in \{0, 1\}}.$$

(c) Écrivons $x = m + s$, $y = n + t$ avec $m = \lfloor x \rfloor$, $n = \lfloor y \rfloor$ et $s, t \in [0, 1[$. D'après la première question, on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = m + n + \lfloor m + n + s + t \rfloor = 2m + 2n + \lfloor s + t \rfloor,$$

puis

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = \lfloor 2m + 2s \rfloor + \lfloor 2n + 2t \rfloor = 2m + 2n + \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor.$$

Il reste donc à vérifier, pour $s, t \in [0, 1[$, que

$$\lfloor s + t \rfloor \leq \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor.$$

On distingue les cas :

- si $s < \frac{1}{2}$ et $t < \frac{1}{2}$, alors $\lfloor 2s \rfloor = \lfloor 2t \rfloor = 0$ et $s + t < 1$, donc $\lfloor s + t \rfloor = 0$;
- si un des deux (exactement un) est $\geq \frac{1}{2}$, alors $\lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor = 1$ et $\lfloor s + t \rfloor \in \{0, 1\}$;
- si $s \geq \frac{1}{2}$ et $t \geq \frac{1}{2}$, alors $\lfloor 2s \rfloor = \lfloor 2t \rfloor = 1$ donc $\lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor = 2$ et $1 \leq \lfloor s + t \rfloor \leq 1$.

Dans tous les cas $\lfloor s + t \rfloor \leq \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor$, d'où

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor}.$$

2. Des valeurs absolues.

(a) On a l'identité

$$2x = (x + y) + (x - y).$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$2|x| = |2x| = |(x + y) + (x - y)| \leq |x + y| + |x - y|.$$

De même $2|y| \leq |x + y| + |x - y|$. En sommant ces deux inégalités et en divisant par 2 on obtient

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

$$\boxed{|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|}.$$

(b) Développons

$$xy - 1 = (x - 1)(y - 1) + (x - 1) + (y - 1).$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|xy - 1| \leq |x - 1||y - 1| + |x - 1| + |y - 1|.$$

En ajoutant 1 des deux côtés :

$$1 + |xy - 1| \leq 1 + |x - 1| + |y - 1| + |x - 1||y - 1| = (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|).$$

$$\boxed{1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)}$$

(c) Par l'inégalité triangulaire on a $1 + |x + y| \leq 1 + |x| + |y|$, d'où

$$u(x + y) = \frac{|x + y| + 1 - 1}{1 + |x + y|} = 1 - \frac{1}{1 + |x + y|} \leq 1 - \frac{1}{1 + |x| + |y|}.$$

$$\text{Puis } u(x + y) \leq \frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|}.$$

$$\text{Comme } 1 + |x| \leq 1 + |x| + |y|, \frac{|x|}{1 + |x|} \geq \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} \text{ car } |x| \geq 0.$$

$$\text{De même } \frac{|y|}{1 + |y|} \geq \frac{|y|}{1 + |x| + |y|}.$$

$$\text{Finalement, } u(x + y) \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}, \text{ soit}$$

$$\boxed{u(x + y) \leq u(x) + u(y)}.$$