

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'objet de ce problème est de majorer l'expression

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Premières sommes

1. Simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
2. (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
 (b) Montrer que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$ (on pourra adapter la technique précédente).
4. Dédurre des résultats précédents que

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

La somme qui nous intéresse

On note :

- A l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
- B l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\left| x - \frac{k}{n} \right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On appelle alors $f_A(x) = \sum_{k \in A} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $f_B(x) = \sum_{k \in B} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

5. Montrer que $f_A(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
6. Montrer que $f_B(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

7. Effectuer l'étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$.

8. En déduire que $f(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

Problème 2

A Un exemple

On souhaite déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = 2x + 4 \quad (\text{E})$$

1. On cherche tout d'abord les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = 0 \quad (\text{H})$$

(a) Soit $K \in \mathbb{R}$. Vérifier que $y : x \mapsto Ke^{-2x}$ satisfait l'équation (H).

(b) Réciproquement, soit y solution de (H). On pose $f : x \mapsto y(x)e^{2x}$. Montrer que f est constante.

2. On s'intéresse maintenant à (E)

(a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 : x \mapsto ax + b$ soit solution de (E).

(b) Si y est solution de (E), soit $z = y - y_0$. Montrer que z est solution de (H).

(c) Réciproquement, vérifier que pour tout $K \in \mathbb{R}$, $y : x \mapsto y_0(x) + Ke^{-2x}$ est solution de (E).

B Généralisation

Soit a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (\text{E1})$$

On définit l'équation (appelée **équation homogène associée**) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0 \quad (\text{H1})$$

3. Soit A une fonction telle que $A' = a$. Montrer que y est solution de (H1) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $y : x \mapsto Ke^{-A(x)}$. (On pourra s'inspirer de la démarche de la question 1)

4. On cherche une solution de (E1) de la forme $y_0 : x \mapsto u(x)e^{-A(x)}$. Montrer que y_0 ainsi définie est solution de (E1) si et seulement si u est une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$.

5. Étant donnée y_0 solution de (E1), montrer que y est solution de (E1) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (H1).

6. En déduire l'expression des solutions de (E1).

7. **Application** : trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - 2xy(x) = -(2x - 1)e^x$$

C Second ordre

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables (*i.e.* dérivables et telles que leur dérivée le soit également) vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0. \quad (\text{E2})$$

8. Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto e^{rx}$ vérifie (E2) si et seulement si r est solution de

$$\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0 \quad (\text{EC})$$

On appelle cette équation (EC) comme **équation caractéristique** associée à (E2).

9. Soit Δ le discriminant de (EC).

- (a) Supposons $\Delta > 0$ et soit r_1, r_2 les deux solutions de (EC). Alors $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$ sont solutions de (E2). Montrer que pour toutes constantes $K, L \in \mathbb{R}$, $y = Ky_1 + Ly_2$ est aussi solution de (E2). On admettra que ce sont les seules.
- (b) Supposons $\Delta = 0$ et soit r l'unique solution de (EC). Montrer que $x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto xe^{rx}$ sont deux solutions de (E2).

10. **Application :**

- (a) Donner l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

- (b) À l'aide des parties précédentes et en justifiant votre démarche, déterminer l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 6x - 5.$$