

Exercice 1

On pose $s(1) = 1$, $s(2) = 3 + 5$, $s(3) = 7 + 9 + 11$, et ainsi de suite, si bien que pour $n \geq 2$, $s(n)$ désigne la somme des n nombres impairs suivant ceux qui apparaissent dans $s(n-1)$.

1. $s(1) = 1$, $s(2) = 8$, $s(3) = 27$, $s(4) = 64$. On reconnaît les valeurs des premiers cubes et on conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s(n) = n^3$.

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le k -ième entier naturel impair vaut $I(k) = 2k - 1$.

(Si on le souhaite, cela se démontre par récurrence car $I(1) = 1 = 2 \times 1 - 1$ et si $I(k) = 2k - 1$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors $I(k+1) = I(k) + 2 = 2k + 1 = 2(k+1) - 1$.)

- (b) $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $A(N) = \sum_{k=1}^N I(k) = \sum_{k=1}^N (2k - 1) = 2 \left(\sum_{k=1}^N k \right) - N = N(N+1) - N = N^2$.

- (c) Par définition, les $s(i)$, examinés dans l'ordre, font intervenir tous les nombres impairs successifs. Ainsi $B(n) = \sum_{i=1}^n s(i)$ est la somme des N premiers nombres impairs, où N est le nombre de termes de cette somme, à déterminer. Chaque $s(i)$ étant la somme de i nombres impairs, $N = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\text{Finalement, } B(n) = A\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

- (d) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s(n) = B(n) - B(n-1)$ (en posant $B(0) = 0$).

$$\text{Donc } s(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = \frac{4n^3}{4} \text{ après développement et simplification.}$$

$$\text{Finalement, } s(n) = n^3.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n i^3 = \sum_{i=1}^n s(i) = B(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Problème 1

Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels positifs. Le but du problème est de montrer que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1. Si les nombres a_k sont tous nuls ou si les b_k sont tous nuls, alors d'une part $a_k b_k = 0$ pour tout k , donc $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0$. D'autre part, soit $\sum_{k=1}^n a_k^p = 0$, soit $\sum_{k=1}^n b_k^q = 0$. Dans les deux cas le produit de ces sommes est nul. D'où l'inégalité recherchée (qui est même alors une égalité).

On suppose dans la suite que les a_k ne sont pas tous nuls et que les b_k ne sont pas tous nuls. On pose alors $A = \sum_{k=1}^n a_k^p$ et $B = \sum_{k=1}^n b_k^q$.

2. Pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, on définit $f : x \mapsto ax - \frac{a^p}{p} - \frac{x^q}{q}$.

(a) La fonction puissance $x \mapsto x^q$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par multiplication par une constante et somme, f est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = a - \frac{qx^{q-1}}{q} = a - x^{q-1}.$$

$$\text{On a } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{q-1} = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{q-1}} \text{ (} a \text{ étant bien positif).}$$

$$\text{Et } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < a^{\frac{1}{q-1}}.$$

Ainsi f est croissante sur $]0, a^{\frac{1}{q-1}}]$ et décroissante sur $[a^{\frac{1}{q-1}}, +\infty[$.

(b) L'étude de f montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq f(a^{\frac{1}{q-1}})$.

Pour le calcul de $f(a^{\frac{1}{q-1}})$, remarquons que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donne $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q}$, soit $p = \frac{q}{q-1}$.

$$\text{Ainsi } f(a^{\frac{1}{q-1}}) = a^{1+\frac{1}{q-1}} - \frac{a^p}{p} - \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} = a^p \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) = 0.$$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq 0$.

En particulier, $f(b) \leq 0$, soit $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

3. Cas particulier : on suppose (dans cette question seulement) que $A = B = 1$.

Pour tout k , on a $a_k b_k \leq \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}$. On somme :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \frac{A}{p} + \frac{B}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ d'après l'hypothèse de cette question.}$$

$$\text{On a bien } \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq 1.$$

4. Cas général (sans hypothèse particulière sur A et B).

(a) On définit pour tout k : $u_k = \frac{a_k}{A^{1/p}}$ et $v_k = \frac{b_k}{B^{1/q}}$.

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{A^{1/p}} \sum_{k=1}^n a_k \text{ et } \sum_{k=1}^n v_k = \frac{1}{B^{1/q}} \sum_{k=1}^n b_k.$$

(b) D'après la question 2b, on a pour tout k (u_k et v_k étant positifs) :

$$u_k v_k \leq \frac{u_k^p}{p} + \frac{v_k^q}{q}. \text{ On somme : } \sum_{k=1}^n u_k v_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n u_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n v_k^q.$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{A^{1/p}} \frac{1}{B^{1/q}} \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \frac{1}{p} \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{q} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^n b_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\text{Finalement } \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq A^{1/p} B^{1/q}, \text{ ce qui est exactement l'inégalité voulue.}$$